Συναρτησιακή Ανάλυση, εαρινό εξάμηνο 2016-17.

Δέκατο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Έστω χώρος Banach X και χώρος με νόρμα Y. Αν ο $T \in L(X,Y)$ είναι επί του Y και ανοικτή απεικόνιση, αποδείξτε ότι ο Y είναι πλήρης.

   Υπόδειξη: Θεωρήστε τον $N(T) = \{x \in X \,|\, Tx = 0\}$ και τον φραγμένο τελεστή $\widetilde{T} : X/N(T) \to Y$ που ορίζεται με τύπο $\widetilde{T}([x]_{N(T)}) = Tx$ και αποδείξτε ότι ο $\widetilde{T}$ είναι ανοικτή απεικόνιση.

2. Έστω χώροι με νόρμα X, Y και γραμμικός τελεστής $T : X \to Y$. Αν $y^* \circ T \in X^*$ για κάθε $y^* \in Y^*$, αποδείξτε ότι $T \in L(X,Y)$.

   Υπόδειξη: Αρχή Ομοιόμορφου Φράγματος.

3. Έστω χώροι με νόρμα X, Y ένας τουλάχιστον εκ των οποίων είναι χώρος Banach. Αν η $B : X \times Y \to F$ έχει την ιδιότητα ότι για κάθε $x \in X$ ισχύει $B(x,\cdot) \in Y^*$ και για κάθε $y \in Y$ ισχύει $B(\cdot,y) \in X^*$, αποδείξτε ότι υπάρχει $C \geq 0$ ώστε να ισχύει $|B(x,y)| \leq C\|x\|\|y\|$ για κάθε $x \in X$ και $y \in Y$.

   Υπόδειξη: Αρχή Ομοιόμορφου Φράγματος.

4. Έστω χώρος με νόρμα X και ακολουθία (x_n) στον X ώστε να ισχύει $\sum_{n=1}^{+\infty} |x^*(x_n)| < +\infty$ για κάθε $x^* \in X^*$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $C \geq 0$ ώστε να ισχύει $\sum_{n=1}^{+\infty} |x^*(x_n)| \leq C\|x^*\|$ για κάθε $x^* \in X^*$.

   Υπόδειξη: Αρχή Ομοιόμορφου Φράγματος με τις συναρτήσεις $f_N(x^*) = \sum_{n=1}^{N} |x^*(x_n)|$.

5. Έστω κλειστός υπόχωρος X του $L^1([0,1])$. Αν για κάθε $f \in X$ υπάρχει $p > 1$ ώστε $f \in L^p([0,1])$, αποδείξτε ότι υπάρχει $p > 1$ ώστε $X \subseteq L^p([0,1])$.

6. Έστω γραμμικός χώρος X με δύο νόρμες $\|\cdot\|_1$ και $\|\cdot\|_2$, ο οποίος είναι πλήρης και με τις δύο νόρμες. Αν υπάρχει $C > 0$ ώστε να ισχύει $\|x\|_1 \leq C\|x\|_2$ για κάθε $x \in X$, αποδείξτε ότι οι δύο νόρμες είναι ισοδύναμες.

   Υπόδειξη: Θεώρημα Ανοικτής Απεικόνισης.

7. Έστω γραμμικός χώρος X με δύο νόρμες $\|\cdot\|_1$ και $\|\cdot\|_2$, ο οποίος είναι πλήρης και με τις δύο νόρμες. Υποθέτουμε ότι, αν μία ακολουθία (x_n) στον X συγκλίνει στο x ως προς την $\|\cdot\|_1$ και στο x' ως προς την $\|\cdot\|_2$, τότε $x = x'$. Αποδείξτε ότι οι δύο νόρμες είναι ισοδύναμες.

   Υπόδειξη: Θεώρημα Κλειστού Γραφήματος.

8. Έστω $\|\cdot\|$ οποιαδήποτε νόρμα στον $C([0,1])$ με την οποία ο $C([0,1])$ είναι πλήρης. Αν για κάθε (f_n) και f στον $C([0,1])$ με $\|f_n - f\| \to 0$ συνεπάγεται ότι $f_n \to f$ κατά σημείο στο $[0,1]$, αποδείξτε ότι η $\|\cdot\|$ είναι ισοδύναμη με την ομοιόμορφη νόρμα.

9. Έστω κλειστός υπόχωρος X του $L^1([0,2])$ ώστε για κάθε $f \in L^1([0,1])$ να υπάρχει $F \in X$ της οποίας ο περιορισμός στο $[0,1]$ είναι η f. Αποδείξτε ότι υπάρχει $C \geq 0$ ώστε για κάθε $f \in L^1([0,1])$ να υπάρχει $F \in X$ με $\|F\|_1 \leq C\|f\|_1$ της οποίας ο περιορισμός στο $[0,1]$ είναι η f.

10. Έστω χώροι Banach X, Y και $T \in L(X,Y)$. Αν ο $R(T)$ έχει πεπερασμένη συνδιάσταση, αποδείξτε ότι ο $R(T)$ είναι κλειστός.

    Υπόδειξη: Υπάρχουν $y_1, \dots, y_n$ ώστε για κάθε $y \in Y$ να υπάρχουν μοναδικά $y' \in R(T)$ και $\kappa_1, \dots, \kappa_n \in F$ ώστε $y = y' + \kappa_1 y_1 + \cdots + \kappa_n y_n$. Θεωρήστε τον τελεστή $S : X \oplus F^n \to Y$ με τύπο $S(x, \kappa_1, \dots, \kappa_n) = Tx + \kappa_1 y_1 + \cdots + \kappa_n y_n$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $C \geq 0$ ώστε για κάθε $y \in R(T)$ να υπάρχει $x \in X$ ώστε $Tx = y$ και $\|x\| \leq C\|y\|$.

11. Έστω χώρος Banach X και $\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ μία βάση Schauder του X. Για κάθε n θεωρούμε την $P_n : X \to X$ με τύπο $P_n x = \sum_{i=1}^{n} \kappa_i x_i$ για κάθε $x = \sum_{i=1}^{+\infty} \kappa_i x_i \in X$. Επίσης, για κάθε $x \in X$ ορίζουμε $\|x\|' = \sup_n \|P_n x\|$.
(i) Αποδείξτε ότι η $\|\cdot\|'$ είναι νόρμα στον X.
(ii) Αποδείξτε ότι ο X με την $\|\cdot\|'$ είναι πλήρης.
(iii) Αποδείξτε ότι υπάρχει $C \geq 1$ ώστε να ισχύει $\|x\| \leq \|x\|' \leq C\|x\|$ για κάθε $x \in X$.
(iv) Αποδείξτε ότι για κάθε συμπαγές $K \subseteq X$ ισχύει $\|P_n x - x\| \to 0$ ομοιόμορφα στο K.

12. Έστω χώροι Banach X, Y και $T \in L(X, Y)$. Αποδείξτε ότι ο $R(T)$ είναι κλειστός υπόχωρος του Y αν και μόνον αν υπάρχει $C > 0$ ώστε να ισχύει $\inf_{z \in N(T)} \|x - z\| \leq C\|Tx\|$ για κάθε $x \in X$.

13. Έστω χώρος Hilbert X και γραμμικός τελεστής $T : X \to X$ ώστε να ισχύει $(Tx|y) = (x|Ty)$ για κάθε $x, y \in X$. Αποδείξτε ότι $T \in L(X)$.

14. [α] Έστω χώρος Banach X και $T \in L(X)$. Αν για κάθε $x \in X$ η σειρά $x + \sum_{n=1}^{+\infty} T^n x$ συγκλίνει στον X, αποδείξτε ότι ο $I - T$ έχει φραγμένο αντίστροφο.
Υπόδειξη: Είναι προφανές το πώς θα ορισθεί ο $(I - T)^{-1}$. Ίσως χρειασθεί η Αρχή Ομοιόμορφου Φράγματος.
[β] Έστω $K \in C([0,1] \times [0,1])$. Θεωρούμε την **εξίσωση Volterra**:
$$f(t) = g(t) + \int_0^t K(s,t) f(s)\, ds, \qquad \text{όπου } g \in C([0,1]).$$
Αποδείξτε ότι η εξίσωση έχει μοναδική λύση $f \in C([0,1])$ για κάθε $g \in C([0,1])$.
Υπόδειξη: Θέσατε $Tf(t) = \int_0^t K(s,t) f(s)\, ds$ για κάθε $t \in [0,1]$ και αποδείξτε επαγωγικά ότι $\|T^n f\|_u \leq \frac{\|K\|_u}{n!} \|f\|_u$.