

Συναρτησιακή Ανάλυση, εαρινό εξάμηνο 2016-17.

Δεύτερο φυλλάδιο ασκήσεων.

Παραδώστε τις ασκήσεις 2, 3, 4, 5 και 7 μέχρι το μάθημα της Παρασκευής 24/2.

Το σύμβολο $\langle A \rangle$ δηλώνει τον γραμμικό χώρο ο οποίος παράγεται από το σύνολο A . Επίσης, το σύμβολο $\text{codim}(M)$ δηλώνει την διάσταση του X/M .

1. Θεωρήστε τον l^1 με την 1-νόρμα και τον υπόχωρο $X = \langle \{e_j \mid j \in \mathbb{N}\} \rangle$. Αποδείξτε ότι στον X η $\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^2} e_j$ συγκλίνει απολύτως αλλά δεν συγκλίνει.
2. Έστω X χώρος Banach. Τα στοιχεία $b_1, b_2, \dots$ του X λέμε ότι αποτελούν **βάση Schauder** του X αν για κάθε $x \in X$ υπάρχουν μοναδικά $\kappa_1, \kappa_2, \dots \in F$ ώστε $x = \sum_{j=1}^{+\infty} \kappa_j b_j$.
Βρείτε βάση Schauder για καθέναν από τους l^p , $1 \leq p < +\infty$. Υπάρχει βάση Schauder για τον l^∞ ;
3. [α] Έστω χώρος X πεπερασμένης διάστασης με νόρμα $\|\cdot\|$ και γραμμικός υπόχωρος $Y \neq X$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $x \in X$ με $\|x\| = \inf\{\|y - x\| \mid y \in Y\} = 1$.
[β] Στον $C([0, 1])$ με την ομοιόμορφη νόρμα θεωρούμε τους υποχώρους

$$X = \{f \in C([0, 1]) \mid f(0) = 0\}, \quad Y = \left\{f \in X \mid \int_0^1 f(x) dx = 0\right\}.$$

Αποδείξτε ότι ο X είναι κλειστός υπόχωρος του $C([0, 1])$ και άρα χώρος Banach, ότι $Y \neq X$, ότι ο Y είναι κλειστός υπόχωρος του X και ότι για οποιαδήποτε $f \in X$ με $\|f\|_u = 1$ ισχύει $\inf\{\|g - f\|_u \mid g \in Y\} < 1$.

4. Αποδείξτε ότι η ομοιόμορφη νόρμα στον $C([0, 1])$ δεν είναι ομοιόμορφα κυρτή.
Θεωρήστε το

$$K = \left\{g \in C([0, 1]) \mid g(0) = 1, \int_0^1 g(x) dx = 0\right\}.$$

Αποδείξτε ότι το K είναι κλειστό και κυρτό υποσύνολο του $C([0, 1])$. Αν f είναι η σταθερή συνάρτηση 1 στο $[0, 1]$, αποδείξτε ότι

$$\inf_{g \in K} \|g - f\|_u = 1$$

και ότι δεν υπάρχει καμία $g \in K$ ώστε $\|g - f\|_u = 1$.

5. Έστω χώρος X με νόρμα, M κλειστός υπόχωρος του X και Y υπόχωρος του X με $\dim(Y) < +\infty$ και $M \cap Y = \{0\}$. Αποδείξτε ότι ο $M + Y$ είναι κλειστός υπόχωρος του X .
Αποδείξτε το ίδιο αποτέλεσμα με τις ίδιες υποθέσεις εκτός της $M \cap Y = \{0\}$.
6. Έστω χώρος X με νόρμα, M κλειστός υπόχωρος του X με $\text{codim}(M) < +\infty$ και Y υπόχωρος του X . Αποδείξτε ότι ο $M + Y$ είναι κλειστός υπόχωρος του X .
7. Έστω χώρος X με εσωτερικό γινόμενο $(\cdot | \cdot)$ και επαγόμενη νόρμα $\|\cdot\|$.
[α] Αν $\|x_n\| \leq 1$, $\|y_n\| \leq 1$ και $(x_n | y_n) \rightarrow 1$, αποδείξτε ότι $\|x_n - y_n\| \rightarrow 0$.
[β] Αν $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$ και $(x_n | y) \rightarrow (x | y)$ για κάθε $y \in X$, αποδείξτε ότι $\|x_n - x\| \rightarrow 0$.
8. Έστω χώρος X με νόρμα $\|\cdot\|$ και έστω ότι ισχύει η ταυτότητα του παραλληλογράμμου:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \quad \text{για κάθε } x, y \in X.$$

Αν $F = \mathbb{R}$ και ορίσουμε

$$(x|y) = \frac{1}{4} \|x + y\|^2 + \frac{1}{4} \|x - y\|^2 \quad \text{για κάθε } x, y \in X,$$

αποδείξτε ότι το $(\cdot|\cdot)$ είναι εσωτερικό γινόμενο στον X και ότι επάγει την $\|\cdot\|$.

Αν $F = \mathbb{C}$, αποδείξτε το ίδιο πράγμα με το

$$(x|y) = \frac{1}{4} \|x + y\|^2 - \frac{1}{4} \|x - y\|^2 + \frac{i}{4} \|x + iy\|^2 - \frac{i}{4} \|x - iy\|^2 \quad \text{για κάθε } x, y \in X.$$

9. Έστω χώρος X με εσωτερικό γινόμενο $(\cdot|\cdot)$ και επαγόμενη νόρμα $\|\cdot\|$. Αν $x, y \in X$, προσδιορίστε όλες τις περιπτώσεις ώστε να ισχύει η ισότητα $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$.

10. Στον χώρο l^2 θεωρούμε τους υποχώρους

$$M = \text{cl}(\langle \{e_{2j} \mid j \in \mathbb{N}\} \rangle), \quad Y = \text{cl}(\langle \{e_{2j} + (1/j)e_{2j-1} \mid j \in \mathbb{N}\} \rangle).$$

Αποδείξτε ότι ο $M + Y$ είναι πυκνός στον l^2 και $(1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, 0, \dots) \notin M + Y$. Άρα ο $M + Y$ δεν είναι κλειστός.

11. Μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow F$ ονομάζεται **συνάρτηση φραγμένης κύμανσης** στο $\mathbb{R}$ αν υπάρχει $M \geq 0$ ώστε να ισχύει

$$\sum_{j=1}^{n-1} |f(t_{j+1}) - f(t_j)| \leq M \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N} \text{ και } t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R} \text{ με } t_1 < \dots < t_n.$$

Ορίζουμε το σύνολο $BV(\mathbb{R})$ με στοιχεία όλες τις συναρτήσεις φραγμένης κύμανσης στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $f \in BV(\mathbb{R})$ ορίζουμε

$$\|f\|_{BV} = |f(0)| + \sup \left\{ \sum_{j=1}^{n-1} |f(t_{j+1}) - f(t_j)| \mid n \in \mathbb{N}, t_1 < \dots < t_n \right\}.$$

Αποδείξτε ότι ο $BV(\mathbb{R})$ είναι γραμμικός χώρος επί του F , ότι η $\|\cdot\|_{BV}$ είναι νόρμα στον $BV(\mathbb{R})$ και ότι ο $BV(\mathbb{R})$ είναι χώρος Banach.

12. [α] Έστω $0 < \alpha \leq 1$. Μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow F$ ονομάζεται **συνάρτηση Lipschitz τάξης α** στο $\mathbb{R}$ αν υπάρχει $M \geq 0$ ώστε να ισχύει

$$|f(t) - f(s)| \leq M\delta^\alpha \quad \text{για κάθε } \delta > 0 \text{ και } t, s \in \mathbb{R} \text{ με } |t - s| \leq \delta.$$

Ορίζουμε $Lip_\alpha(\mathbb{R})$ τον χώρο με στοιχεία όλες τις συναρτήσεις Lipschitz τάξης α στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $f \in Lip_\alpha(\mathbb{R})$ ορίζουμε

$$\omega_\delta(f) = \sup\{|f(t) - f(s)| \mid |t - s| \leq \delta\}, \quad \|f\|_{Lip_\alpha} = |f(0)| + \sup_{\delta > 0} \frac{\omega_\delta(f)}{\delta^\alpha}.$$

Αποδείξτε ότι ο $Lip_\alpha(\mathbb{R})$ είναι γραμμικός χώρος επί του F , ότι η $\|\cdot\|_{Lip_\alpha}$ είναι νόρμα στον $Lip_\alpha(\mathbb{R})$ και ότι ο $Lip_\alpha(\mathbb{R})$ είναι χώρος Banach.

[β] Ορίζουμε το σύνολο $lip_\alpha(\mathbb{R})$ με στοιχεία όλες τις συναρτήσεις $f \in Lip_\alpha(\mathbb{R})$ με την ιδιότητα

$$\lim_{\delta \rightarrow 0+} \frac{\omega_\delta(f)}{\delta^\alpha} = 0.$$

Αποδείξτε ότι ο $lip_\alpha(\mathbb{R})$ είναι κλειστός υπόχωρος του $Lip_\alpha(\mathbb{R})$. Αποδείξτε ότι τα στοιχεία του $lip_1(\mathbb{R})$ είναι οι σταθερές συναρτήσεις.

13. [α] Έστω $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ ο ανοικτός μοναδιαίος δίσκος στο $\mathbb{C}$. Για $1 \leq p < +\infty$ θεωρούμε το σύνολο $H^p(\mathbb{D})$ με στοιχεία όλες τις συναρτήσεις οι οποίες είναι ολόμορφες στο $\mathbb{D}$ με την ιδιότητα

$$\sup_{0 \leq r < 1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta < +\infty.$$

Για κάθε $f \in H^p(\mathbb{D})$ ορίζουμε

$$\|f\|_p = \sup_{0 \leq r < 1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right)^{1/p}.$$

Αποδείξτε ότι το $H^p(\mathbb{D})$ είναι γραμμικός χώρος επί του $\mathbb{C}$, ότι η $\|\cdot\|_p$ είναι νόρμα στον $H^p(\mathbb{D})$ και ότι ο $H^p(\mathbb{D})$ είναι χώρος Banach.

[β] Ορίζουμε το σύνολο $H^\infty(\mathbb{D})$ με στοιχεία όλες τις συναρτήσεις οι οποίες είναι ολόμορφες και φραγμένες στο $\mathbb{D}$. Για κάθε $f \in H^\infty(\mathbb{D})$ ορίζουμε

$$\|f\|_\infty = \sup_{z \in \mathbb{D}} |f(z)|.$$

Αποδείξτε ότι το $H^\infty(\mathbb{D})$ είναι γραμμικός χώρος επί του $\mathbb{C}$, ότι η $\|\cdot\|_\infty$ είναι νόρμα στον $H^\infty(\mathbb{D})$ και ότι ο $H^\infty(\mathbb{D})$ είναι χώρος Banach.

[γ] Ορίζουμε το σύνολο $A(\mathbb{D})$ με στοιχεία όλες τις συναρτήσεις f οι οποίες είναι συνεχείς στο $\text{cl}(\mathbb{D}) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ και ολόμορφες στο $\mathbb{D}$. Για κάθε $f \in A(\mathbb{D})$ ορίζουμε

$$\|f\|_\infty = \max_{|z| \leq 1} |f(z)|.$$

Αποδείξτε ότι το $A(\mathbb{D})$ είναι γραμμικός χώρος επί του $\mathbb{C}$, ότι η $\|\cdot\|_\infty$ είναι νόρμα στον $A(\mathbb{D})$ και ότι ο $A(\mathbb{D})$ είναι χώρος Banach.

14. [α] Έστω $0 < t \leq 1$ και $\kappa, \lambda \in \mathbb{C}$. Αν $1 < p \leq 2$, αποδείξτε ότι

$$((1+t)^{p-1} + (1-t)^{p-1})|\kappa|^p + \left(\left(\frac{1}{t} + 1 \right)^{p-1} - \left(\frac{1}{t} - 1 \right)^{p-1} \right)|\lambda|^p \leq |\kappa + \lambda|^p + |\kappa - \lambda|^p.$$

Αν $2 \leq p < +\infty$, αποδείξτε ότι η προηγούμενη ανισότητα ισχύει με $\geq$ αντί $\leq$.

Αν, επιπλέον, $0 < \lambda \leq \kappa$ και $t = \frac{\lambda}{\kappa}$, αποδείξτε ότι η προηγούμενη ανισότητα ισχύει ως ισότητα για κάθε p με $1 < p < +\infty$.

[β] **Ανισότητες Hanner.** Αν $1 < p \leq 2$, αποδείξτε ότι

$$\|x + y\|_p^p + \|x - y\|_p^p \geq \|x\|_p^p + \|y\|_p^p + \left| \|x\|_p - \|y\|_p \right|^p$$

για κάθε x, y στον l^p ή σε χώρο πεπερασμένης διάστασης και

$$\|f + g\|_p^p + \|f - g\|_p^p \geq \|f\|_p^p + \|g\|_p^p + \left| \|f\|_p - \|g\|_p \right|^p$$

για κάθε $f, g \in L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$.

Αν $2 \leq p < +\infty$, αποδείξτε ότι ισχύουν οι ίδιες ανισότητες με $\leq$.

[γ] Αν $1 < p < +\infty$, αποδείξτε ότι η p -νόρμα στον $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$, στον l^p και σε κάθε χώρο πεπερασμένης διάστασης είναι ομοιόμορφα κυρτή.