Συναρτησιακή Ανάλυση, εαρινό εξάμηνο 2016-17.

Τέταρτο φυλλάδιο ασκήσεων.

Παραδώστε ένα (όποιο θέλετε) από τα [α], [β], [γ] της άσκησης 1 καθώς και τις ασκήσεις 6, 11, 12 του φυλλαδίου 2 και την άσκηση 6 του φυλλαδίου 3 μέχρι το μάθημα της Παρασκευής 10/3.

1. Θεωρήστε γνωστό το θεώρημα του Weierstrass: *για κάθε κλειστό φραγμένο διάστημα* $[a, b]$ *το σύνολο των πολυωνύμων είναι πυκνό στον* $C([a, b])$ *με την ομοιόμορφη νόρμα.*

   [α] Θεωρήστε τις συναρτήσεις

   $$P_n(t) = \frac{(2n+1)^{1/2}}{2^{n+1/2}n!}\,\frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

   Αποδείξτε ότι κάθε P_n είναι πολυώνυμο βαθμού n και ότι το σύνολο των P_n αποτελεί ορθοκανονική βάση του $L^2([-1, 1])$. Οι συναρτήσεις P_n ονομάζονται **πολυώνυμα Legendre**.

   [β] Θεωρήστε τις συναρτήσεις

   $$H_n(t) = (-1)^n e^{t^2}\,\frac{d^n}{dt^n}(e^{-t^2}), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

   Αποδείξτε ότι κάθε H_n είναι πολυώνυμο βαθμού n. Οι συναρτήσεις H_n ονομάζονται **πολυώνυμα Hermite**. Αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις

   $$\psi_n(t) = \frac{1}{\pi^{1/4}2^{n/2}(n!)^{1/2}}\,H_n(t)e^{-\frac{1}{2}t^2}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

   αποτελούν ορθοκανονική βάση του $L^2(\mathbb{R})$.

   [γ] Θεωρήστε τις συναρτήσεις

   $$L_n(t) = e^t\,\frac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-t}), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

   Αποδείξτε ότι κάθε L_n είναι πολυώνυμο βαθμού n. Οι συναρτήσεις L_n ονομάζονται **πολυώνυμα Laguerre**. Αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις

   $$\phi_n(t) = \frac{1}{n!}\,L_n(t)e^{-\frac{1}{2}t}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

   αποτελούν ορθοκανονική βάση του $L^2([0, +\infty))$.