Συναρτησιακή Ανάλυση, εαρινό εξάμηνο 2016-17.

Έκτο φυλλάδιο ασκήσεων.

Παραδώστε τις ασκήσεις 1, 3, 4, 8 και 10 μέχρι το μάθημα της Παρασκευής 24/3.

1. Αν ο X είναι χώρος Banach, αποδείξτε ότι ο X είναι αυτοπαθής αν και μόνον αν ο X^* είναι αυτοπαθής.

   Υπόδειξη: Θεωρήστε τις φυσιολογικές εμφυτεύσεις $J_0 : X \to X^{**}$ και $J_1 : X^* \to X^{***}$. Αν ο X είναι αυτοπαθής, πάρτε $x^{***} \in X^{***}$, θεωρήστε το $x^* = x^{***} \circ J_0$ και αποδείξτε ότι $x^{***} = J_1(x^*)$. Αντιστρόφως, έστω ότι ο X^* είναι αυτοπαθής, ενώ ο X δεν είναι. Αποδείξτε ότι ο $J_0(X)$ είναι γνήσιος κλειστός υπόχωρος του X^{**} και ότι υπάρχει μη-μηδενικό $x^{***} \in X^{***}$ με $x^{***}(J_0(x)) = 0$ για κάθε $x \in X$. Καταλήξτε σε άτοπο.

2. Αν ο X είναι αυτοπαθής, αποδείξτε ότι για κάθε $x^* \in X^*$ υπάρχει $x \in X$ με $\|x\| = 1$ και $x^*(x) = \|x^*\|$.

3. Έστω τοπολογικός χώρος (π.χ. μετρικός χώρος) A και $B \subseteq A$. Το B ονομάζεται σύνολο **πρώτης κατηγορίας** στον A αν υπάρχουν $B_n \subseteq A$ με $B = \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n$ ώστε κάθε $\mathrm{cl}(B_n)$ να έχει κενό εσωτερικό. Το B ονομάζεται σύνολο **δεύτερης κατηγορίας** στον A αν δεν είναι σύνολο πρώτης κατηγορίας στον A.

   [α] Αποδείξτε ότι κάθε πλήρης μετρικός χώρος είναι σύνολο δεύτερης κατηγορίας στον εαυτό του.

   [β] Έστω χώρος με νόρμα X.

   (i) Αν το M είναι σύνολο δεύτερης κατηγορίας στον X^*, $\mathcal{F} \subseteq X$ και $\sup_{x \in \mathcal{F}} |x^*(x)| < +\infty$ για κάθε $x^* \in M$, αποδείξτε ότι $\sup_{x \in \mathcal{F}} \|x\| < +\infty$.

   (ii) Αν το M είναι σύνολο δεύτερης κατηγορίας στον X, $\mathcal{F} \subseteq X^*$ και $\sup_{x^* \in \mathcal{F}} |x^*(x)| < +\infty$ για κάθε $x \in M$, αποδείξτε ότι $\sup_{x^* \in \mathcal{F}} \|x^*\| < +\infty$.

4. [α] Έστω $1 \leq p < +\infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ και ακολουθία $x = (x_1, x_2, \ldots)$ στο F. Αν για κάθε $y = (y_1, y_2, \ldots) \in l^p$ η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k y_k$ συγκλίνει, αποδείξτε ότι $x \in l^q$.

   Υπόδειξη: Για κάθε n θεωρήστε το $l_n \in (l^p)^*$ με τύπο $l_n(y) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$ για κάθε $y \in l^p$ και υπολογίστε τη νόρμα του l_n.

   [β] Έστω ακολουθία $x = (x_1, x_2, \ldots)$ στο F. Αν για κάθε $y = (y_1, y_2, \ldots) \in c_0$ η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k y_k$ συγκλίνει, αποδείξτε ότι $x \in l^1$.

5. Έστω (Ω, Σ, μ) ένας χώρος μέτρου και μετρήσιμη $f : \Omega \to F$.

   [α] Έστω $1 < p \leq +\infty$ και $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Αν $fg \in L^1$ για κάθε $g \in L^p$, αποδείξτε ότι $f \in L^q$.

   [β] Έστω ότι το μ είναι σ-πεπερασμένο. Αν $fg \in L^1$ για κάθε $g \in L^1$, αποδείξτε ότι $f \in L^\infty$.

6. Έστω χώρος Banach X με νόρμα $\|\cdot\|$ και μία βάση Schauder $B = \{b_1, b_2, \ldots\}$ του X. Θεωρούμε

$$K = \Big\{ \kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \ldots) \text{ ακολουθία στο } F \ \Big| \text{ η σειρά } \sum_{j=1}^{+\infty} \kappa_j b_j \text{ συγκλίνει στον } X \Big\}$$

   καθώς και

$$\|\kappa\|_K = \sup_n \Big\| \sum_{j=1}^{n} \kappa_j b_j \Big\| \qquad \text{για κάθε } \kappa \in K.$$

   [α] Αποδείξτε ότι η $\|\cdot\|_K$ είναι νόρμα στον K και ότι ο K με τη νόρμα αυτή είναι χώρος Banach.

[β] Θεωρούμε $T : K \to X$ με τύπο

$$T(\kappa) = \sum_{j=1}^{+\infty} \kappa_j b_j \qquad \text{για κάθε } \kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \ldots) \in K.$$

Αποδείξτε ότι υπάρχουν σταθερές c_1, c_2 με $0 < c_1 \leq c_2$ ώστε να ισχύει

$$c_1 \|\kappa\|_K \leq \|T(\kappa)\| \leq c_2 \|\kappa\|_K \qquad \text{για κάθε } \kappa \in K.$$

[γ] Θεωρούμε

$$L = \Big\{ \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots) \,\Big|\, \text{η σειρά } \sum_{j=1}^{+\infty} \kappa_j \lambda_j \text{ συγκλίνει για κάθε } \kappa \in K \Big\}$$

και

$$\|\lambda\|_L = \sup_{\|T(\kappa)\| \leq 1} \Big| \sum_{j=1}^{+\infty} \kappa_j \lambda_j \Big|.$$

Αποδείξτε ότι η $\| \cdot \|_L$ είναι νόρμα στον L και ότι $L \overset{iso}{=} X^*$.

7. Έστω χώρος με νόρμα X και υπόχωρος L του X^*. Λέμε ότι ο L **προσδιορίζει τη νόρμα** του X αν υπάρχει $c > 0$ ώστε

$$c\|x\| \leq \sup_{x^* \in L,\, \|x^*\| \leq 1} |x^*(x)| \qquad \text{για κάθε } x \in X.$$

Τώρα έστω χώρος X με νόρμα $\| \cdot \|$ και υπόχωρος L του X^* ο οποίος προσδιορίζει τη νόρμα του X.

[α] Θέτουμε

$$\|x\|' = \sup_{x^* \in L,\, \|x^*\| \leq 1} |x^*(x)| \qquad \text{για κάθε } x \in X.$$

Αποδείξτε ότι η $\| \cdot \|'$ είναι νόρμα στον X ισοδύναμη με την $\| \cdot \|$.

[β] Αν $\mathcal{F} \subseteq X$ και $\sup_{x \in \mathcal{F}} |x^*(x)| < +\infty$ για κάθε $x^* \in L$, αποδείξτε ότι $\sup_{x \in \mathcal{F}} \|x\| < +\infty$.

8. Έστω χώρος με νόρμα X.

[α] Έστω $\mathrm{cl}\langle L \rangle = X^*$. Αν $x^*(x_n) \to x^*(x)$ για κάθε $x^* \in L$ και $\sup_n \|x_n\| < +\infty$, αποδείξτε ότι $x_n \overset{w}{\to} x$ στον X.

[β] Έστω $\mathrm{cl}\langle L \rangle = X$. Αν $x_n^*(x) \to x^*(x)$ για κάθε $x \in L$ και $\sup_n \|x_n^*\| < +\infty$, αποδείξτε ότι $x_n^* \overset{w*}{\to} x^*$ στον X^*.

9. Αποδείξτε ότι $e_n \overset{w}{\to} 0$ στους c, c_0 και ότι η (e_n) δεν έχει ασθενές όριο στον l^1.

10. Έστω $1 < p < +\infty$.

[α] Αποδείξτε ότι $x_n \overset{w}{\to} x$ στον l^p αν και μόνο αν $\sup_n \|x_n\|_p < +\infty$ και $x_n^{(m)} \to x^{(m)}$ στο F για κάθε $m \in \mathbb{N}$.

[β] Έστω $x_n \overset{w}{\to} x$ στον l^p. Αποδείξτε ότι $x_n \to x$ αν και μόνο αν $\|x_n\| \to \|x\|$.

11. (Schur) Αποδείξτε ότι $x_n \overset{w}{\to} x$ στον l^1 αν και μόνο αν $x_n \to x$ στον l^1.

12. Αν ο X είναι αυτοπαθής χώρος με νόρμα και ο Y είναι κλειστός υπόχωρος του X, αποδείξτε ότι ο X/Y είναι αυτοπαθής.

13. Έστω χώρος με νόρμα X.

Η ακολουθία (x_n) στον X ονομάζεται **ασθενώς συγκλίνουσα** αν το $\lim_{n\to+\infty} x^*(x_n)$ υπάρχει στο F για κάθε $x^* \in X^*$. Ο X ονομάζεται **ακολουθιακά ασθενώς πλήρης** αν κάθε ασθενώς συγκλίνουσα ακολουθία του X συγκλίνει ασθενώς σε κάποιο στοιχείο του.

Η ακολουθία (x_n^*) στον X^* ονομάζεται **ασθενώς-$*$ συγκλίνουσα** αν το $\lim_{n\to+\infty} x_n^*(x)$ υπάρχει στο F για κάθε $x \in X$. Ο X^* ονομάζεται **ακολουθιακά ασθενώς-$*$ πλήρης** αν κάθε ασθενώς-$*$ συγκλίνουσα ακολουθία του X^* συγκλίνει ασθενώς-$*$ σε κάποιο στοιχείο του.

[α] Έστω συμπαγής, Hausdorff τοπολογικός χώρος (π.χ. συμπαγής μετρικός χώρος) A και ακολουθία (f_n) στον $C(A)$ η οποία συγκλίνει κατά σημείο στο A σε μία $f : A \to F$ η οποία δεν είναι συνεχής στο A. Αν $\sup_n \|f_n\|_u < +\infty$, αποδείξτε ότι η (f_n) είναι ασθενώς συγκλίνουσα στον $C(A)$, αλλά ότι δε συγκλίνει ασθενώς σε κανένα στοιχείο του $C(A)$.

[β] Αν ο X είναι αυτοπαθής χώρος με νόρμα, αποδείξτε ότι ο X είναι ακολουθιακά ασθενώς πλήρης.

Υπόδειξη: Έστω ακολουθία (x_n) στον X ώστε το $\lim_{n\to+\infty} x^*(x_n)$ να υπάρχει στο F για κάθε $x^* \in X^*$. Θέσατε $x^{**}(x^*) = \lim_{n\to+\infty} x^*(x_n)$ και αποδείξτε ότι $x^{**} \in X^{**}$.

[γ] Αν ο X είναι χώρος Banach, αποδείξτε ότι ο X^* είναι ακολουθιακά ασθενώς-$*$ πλήρης.

14. (Vitali-Hahn-Saks) [α] Έστω χώρος μέτρου (Ω, Σ, μ), ακολουθία μιγαδικών μέτρων (λ_n) στην Σ και έστω ότι κάθε λ_n είναι απολύτως συνεχές ως προς το μ και το $\lim_{n\to+\infty} \lambda_n(A)$ υπάρχει στο F για κάθε $A \in \Sigma$. Θέτουμε

$$\lambda(A) = \lim_{n\to+\infty} \lambda_n(A) \qquad \text{για κάθε } A \in \Sigma.$$

Αποδείξτε ότι το λ είναι μιγαδικό μέτρο στην Σ απολύτως συνεχές ως προς το μ.

[β] Έστω μετρήσιμος χώρος (Ω, Σ), ακολουθία μιγαδικών μέτρων (λ_n) στην Σ και έστω ότι το $\lim_{n\to+\infty} \lambda_n(A)$ υπάρχει στο F για κάθε $A \in \Sigma$. Θέτουμε

$$\lambda(A) = \lim_{n\to+\infty} \lambda_n(A) \qquad \text{για κάθε } A \in \Sigma.$$

Αποδείξτε ότι το λ είναι μιγαδικό μέτρο στην Σ.

15. Έστω χώρος μέτρου (Ω, Σ, μ) και ακολουθία (f_n) στον L^1. Αποδείξτε ότι η (f_n) συγκλίνει ασθενώς σε στοιχείο του L^1 αν και μόνον αν $\sup_n \|f_n\|_1 < +\infty$ και το $\lim_{n\to+\infty} \int_A f_n\, d\mu$ υπάρχει στο F για κάθε $A \in \Sigma$.

Αποδείξτε ότι ο L^1 είναι ακολουθιακά ασθενώς πλήρης (δείτε την άσκηση 14 για τον ορισμό).

16. Έστω χώρος μέτρου (Ω, Σ, μ) και $f_n \xrightarrow{w} f$ στον L^1. Αποδείξτε ότι $f_n \to f$ αν και μόνον αν $f_n \to f$ κατά μέτρο σε κάθε $A \in \Sigma$ με $\mu(A) < +\infty$.

17. [α] Έστω χώρος Banach X, $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$ και $f : [a, b] \to X$ συνεχής στο $[a, b]$. Αποδείξτε ότι υπάρχει μοναδικό $x \in X$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε διαμέριση $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$ με $\max_{1\le j\le n} |t_j - t_{j-1}| < \delta$ και κάθε επιλογή σημείων $\xi_1, \ldots, \xi_n$ με $t_{j-1} \le \xi_j \le t_j$ ισχύει

$$\Big\| \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(t_j - t_{j-1}) - x \Big\| < \epsilon.$$

Αυτό το $x \in X$ ονομάζεται **ολοκλήρωμα Riemann** της f και συμβολίζεται $\int_a^b f(t)\, dt$.

[β] Έστω χώρος Banach X, $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$ και $f : [a, b] \to X$ συνεχής στο $[a, b]$. Παρατηρήστε ότι για κάθε $x^* \in X^*$ η συνάρτηση $x^* \circ f : [a, b] \to F$ είναι συνεχής στο

$[a, b]$ με τιμές στο F και, επομένως, ορίζεται στο πλαίσιο του Απειροστικού Λογισμού το $\int_a^b x^*(f(t))\,dt$. Αποδείξτε ότι

$$\int_a^b x^*(f(t))\,dt = x^*\Big(\int_a^b f(t)\,dt\Big).$$

[γ] Έστω χώρος Banach X, $a, b, c \in \mathbb{R}$ με $a < c < b$, $f, g : [a, b] \to X$ συνεχείς στο $[a, b]$ και $\kappa \in F$. Αποδείξτε τις αναμενόμενες ιδιότητες:

$$\int_a^b (f(t) + g(t))\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt, \qquad \int_a^b \kappa f(t)\,dt = \kappa \int_a^b f(t)\,dt,$$

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt, \qquad \Big|\int_a^b f(t)\,dt\Big| \le (b - a) \sup_{a \le t \le b} \|f(t)\|.$$

18. Έστω χώρος Banach X επί του $\mathbb{C}$, ανοικτό υποσύνολο U του $\mathbb{C}$ και $f : U \to X$.
Η f ονομάζεται **ολόμορφη** στο U αν υπάρχει $g : U \to X$ ώστε

$$\lim_{\mathbb{C} \ni h \to 0} \frac{f(z + h) - f(z)}{h} = g(z) \qquad \text{για κάθε } z \in U.$$

Τότε η g ονομάζεται **παράγωγος** της f και συμβολίζεται f'.

Η f ονομάζεται **ασθενώς ολόμορφη** στο U αν η $x^* \circ f : U \to \mathbb{C}$ είναι ολόμορφη στο U (με τη γνωστή έννοια) για κάθε $x^* \in X^*$.

[α] Αποδείξτε ότι η f είναι ολόμορφη στο U αν και μόνο αν είναι ασθενώς ολόμορφη στο U και ότι τότε $(x^* \circ f)' = x^* \circ f'$ για κάθε $x^* \in X^*$.

[β] Έστω $\kappa \in \mathbb{C}$ και $f, g : U \to X$ και $h : U \to \mathbb{C}$ ολόμορφες στο U.

(i) Αποδείξτε ότι οι κf, $f + g$ και hg είναι ολόμορφες στο U.

(ii) Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στο U και, επομένως, ορίζεται το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_\gamma f(z)\,dz := \int_a^b f(z(t))z'(t)\,dt$$

για κάθε καμπύλη γ στο U με παραμετρικοποίηση $z : [a, b] \to U$, όπου η z' είναι συνεχής στο $[a, b]$. (Δείτε την άσκηση 18 για τον ορισμό του ολοκληρώματος Riemann συνάρτησης με τιμές σε χώρο Banach.)

(iii) (Θεώρημα του Cauchy) Αν το U είναι απλά συνεκτικό ή, γενικότερα, αν η γ είναι ομόλογη του μηδενός ως προς το U (δηλαδή ισχύει $\mathrm{ind}(\gamma; w) = 0$ για κάθε $w \in \mathbb{C} \setminus U$), αποδείξτε ότι

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

(iv) (Τύπος του Cauchy) Αν το U είναι απλά συνεκτικό ή, γενικότερα, αν η γ είναι ομόλογη του μηδενός ως προς το U, αποδείξτε ότι

$$f(z_0)\,\mathrm{ind}(\gamma; z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz \qquad \text{για κάθε } z_0 \in U.$$

(v) (Ανάπτυγμα Taylor) Αποδείξτε ότι για κάθε $z_0 \in U$ υπάρχουν $a_0, a_1, \ldots \in X$ ώστε να ισχύει

$$f(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k \qquad \text{για κάθε } z \in D(z_0; R),$$

όπου $R = \text{dist}(z_0, \mathbb{C} \setminus U)$. Αποδείξτε ότι

$$a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0;r)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} \, dz,$$

όπου $C(z_0; r)$ είναι η περιφέρεια κέντρου z_0 και ακτίνας $r < R$ με την παραμετρικοποίηση $z(t) = z_0 + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
(vi) (Αρχή Μεγίστου) Αν υπάρχει $z_0 \in U$ ώστε να ισχύει

$$\|f(z)\| \leq \|f(z_0)\| \qquad \text{για κάθε } z \in U,$$

αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή στη συνεκτική συνιστώσα του U η οποία περιέχει το z_0.
(vii) (Θεώρημα του Liouville) Αν $U = \mathbb{C}$ και $\sup_{z \in \mathbb{C}} \|f(z)\| < +\infty$, αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή στο $\mathbb{C}$.