Συναρτησιακή Ανάλυση, εαρινό εξάμηνο 2016-17.

Ένατο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Έστω χώροι με νόρμα X, Y, όπου ο X είναι πεπερασμένης διάστασης. Αποδείξτε ότι κάθε γραμμικός τελεστής $T : X \to Y$ είναι φραγμένος.

2. Έστω ακολουθία $\kappa = (\kappa_n)$ στο F. Θεωρήστε τον τελεστή T με τύπο

$$Tx = (\kappa_1 x_1, \kappa_2 x_2, \ldots) \qquad \text{για κάθε } x = (x_1, x_2, \ldots).$$

[α] Αποδείξτε ότι $T \in L(l^p, l^p)$ αν και μόνο αν $\kappa \in l^\infty$ και ότι σ' αυτήν την περίπτωση ισχύει $\|T\| = \|\kappa\|_\infty$.
[β] Αν $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ και $\kappa \in l^\infty$, βρείτε τον δυικό τελεστή $T' \in L(l^q, l^q)$ του $T \in L(l^p, l^p)$.

3. Θεωρήστε τους τελεστές $T_l, T_r : l^p \to l^p$ με τύπους

$$T_l x = (x_2, x_3, \ldots), \quad T_r x = (0, x_1, x_2, \ldots) \qquad \text{για κάθε } x = (x_1, x_2, \ldots) \in l^p.$$

Ο T_l ονομάζεται **αριστερή μετάθεση** και ο T_r ονομάζεται **δεξιά μετάθεση**.
[α] Αποδείξτε ότι και οι δύο τελεστές είναι φραγμένοι και ότι $\|T_l\| = \|T_r\| = 1$.
[β] Βρείτε τους δυικούς τελεστές $T_l', T_r' \in L(l^q, l^q)$ των $T_l, T_r \in L(l^p, l^p)$.

4. Έστω σ-πεπερασμένος χώρος μέτρου (Ω, Σ, μ), μετρήσιμη $g : \Omega \to F$ και ο τελεστής T με τύπο

$$Tf = gf \qquad \text{για κάθε μετρήσιμη } f : \Omega \to F.$$

[α] Αν $L^p = L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$, αποδείξτε ότι $T \in L(L^p, L^p)$ αν και μόνο αν $g \in L^\infty$ και ότι σ' αυτήν την περίπτωση ισχύει $\|T\| = \|g\|_\infty$.
[β] Αν $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ και $g \in L^\infty$, βρείτε τον δυικό τελεστή $T' \in L(L^q, L^q)$ του $T \in L(L^p, L^p)$.

5. Έστω σ-πεπερασμένοι χώροι μέτρου $(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$ και $(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$. Θεωρήστε τον χώρο μέτρου $(\Omega_1 \times \Omega_2, \Sigma_1 \times \Sigma_2, \mu_1 \times \mu_2)$ και μετρήσιμη συνάρτηση $K : \Omega_1 \times \Omega_2 \to F$. Υποθέτουμε ότι
(i) $\int_{\Omega_1} |K(a,b)| \, d\mu_1(a) \le M_2$ για μ_2-σχεδόν κάθε $b \in \Omega_2$
(ii) $\int_{\Omega_2} |K(a,b)| \, d\mu_2(b) \le M_1$ για μ_1-σχεδόν κάθε $a \in \Omega_1$.
[α] Αν $1 < p < +\infty$ και $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, αποδείξτε ότι με τον τύπο

$$Tf(b) = \int_{\Omega_1} K(a,b) f(a) \, d\mu_1(a)$$

ορίζεται φραγμένος τελεστής $T : L^p(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1) \to L^p(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$ και ότι

$$\|T\| \le M_1^{1/p} M_2^{1/q}.$$

[β] Αποδείξτε ότι, αν $p = 1$, ισχύουν τα ίδια με μόνη υπόθεση την (ii), ενώ, αν $p = +\infty$, ισχύουν τα ίδια με μόνη υπόθεση την (i).
[γ] Βρείτε τον δυικό τελεστή του T.

6. Έστω χώροι με νόρμα X, Y και γραμμικός τελεστής $T : X \to Y$. Αποδείξτε ότι ο $T : X \to R(T)$ έχει φραγμένο αντίστροφο αν και μόνον αν υπάρχει $c > 0$ ώστε να ισχύει

$$c\|x\| \le \|Tx\| \qquad \text{για κάθε } x \in X.$$

7. Έστω χώροι Hilbert X, Y και $T \in L(X, Y)$.
[α] Αποδείξτε ότι υπάρχει μοναδικός $T^* \in L(Y, X)$ ώστε να ισχύει
$$(Tx|y) = (x|T^*y) \qquad \text{για κάθε } x \in X,\ y \in Y.$$
Υπόδειξη: Δείτε το $(T(\cdot)|y)$ ως συναρτησοειδές στον X.
[β] Αποδείξτε ότι $\|T\| = \|T^*\|$.
[γ] Βρείτε τη σχέση ανάμεσα στον T^* και στον T'.
Ο τελεστής T^* ονομάζεται **συζυγής του** T. Αν $T = T^*$, τότε ο T ονομάζεται **αυτοσυζυγής**.

8. Έστω χώρος Hilbert X και $T \in L(X)$. Αν υπάρχει $c > 0$ ώστε να ισχύει
$$\mathrm{Re}(Tx|x) \geq c\|x\|^2 \qquad \text{για κάθε } x \in X,$$
αποδείξτε ότι $R(T^*) = X$.
Υπόδειξη: Πρώτα αποδείξτε ότι ο $R(T^*)$ είναι κλειστός υπόχωρος του X.

9. Έστω χώρος Hilbert X και $T \in L(X)$. Αν ο T είναι αυτοσυζυγής, αποδείξτε ότι
$$\|T\| = \sup_{x \in X, \|x\| \leq 1} |(Tx|x)|.$$
Υπόδειξη: Αν $m = \sup_{x \in X, \|x\| \leq 1} |(Tx|x)|$, τότε είναι προφανές ότι $m \leq \|T\|$. Κατόπιν, αποδείξτε ότι, αν $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε
$$4|\lambda\, \mathrm{Re}(Tx|y)| \leq m(\|x+\lambda y\|^2 + \|x-\lambda y\|^2) = 2m(\|x\|^2 + \lambda^2\|y\|^2) \qquad \text{για κάθε } x, y \in X.$$
Με κατάλληλη επιλογή του λ αποδείξτε ότι $|\mathrm{Re}(Tx|y)| \leq m\|x\|\|y\|$ και από αυτό ότι $|(Tx|y)| \leq m\|x\|\|y\|$ για κάθε $x, y \in X$.

10. Έστω χώρος Hilbert X και $T \in L(X)$. Αποδείξτε ότι οι $I + T^*T$ και $I + TT^*$ είναι αυτοσυζυγείς και έχουν φραγμένους αντίστροφους.
Υπόδειξη: Αποδείξτε ότι $((I + T^*T)x|x) \geq \|x\|^2$ για κάθε $x \in X$.

11. Έστω χώρος Hilbert X και $B : X \times X \to F$ με τις ιδιότητες:
(i) $B(x + y, z) = B(x, z) + B(y, z)$, $B(\kappa x, z) = \kappa B(x, z)$ για κάθε $x, y, z \in X$, $\kappa \in F$,
(ii) $B(x, y + z) = B(x, y) + B(x, z)$, $B(x, \kappa z) = \overline{\kappa} B(x, z)$ για κάθε $x, y, z \in X$, $\kappa \in F$,
(iii) υπάρχει $C > 0$ ώστε $|B(x, y)| \leq C\|x\|\|y\|$ για κάθε $x, y \in X$,
(iv) υπάρχει $c > 0$ ώστε $B(x, x) \geq c\|x\|^2$ για κάθε $x \in X$.
Αποδείξτε ότι υπάρχει $T \in L(X)$ με φραγμένο αντίστροφο $T^{-1} \in L(X)$ ώστε $\|T\| \leq C$, $\|T^{-1}\| \leq \frac{1}{c}$ και
$$B(x, y) = (x|Ty) \qquad \text{για κάθε } x, y \in X.$$