Συναρτησιακή Ανάλυση, μεταπτυχιακό μάθημα

Περίληψη του μαθήματος

Μιχάλης Παπαδημητράκης

Τμήμα Μαθηματικών

Πανεπιστήμιο Κρήτης

1η εβδομάδα.

Στα πρώτα δύο μαθήματα είπαμε κάποια πολύ βασικά πράγματα για χώρους με νόρμα.
Μιλήσαμε για υπόχωρους, για χώρους-γινόμενο και για χώρους-πηλίκο.
Είπαμε τί είναι χώρος Banach και αποδείξαμε ότι κάθε απολύτως συγκλίνουσα σειρά σε χώρο Banach συγκλίνει. Είδαμε ότι ένας υπόχωρος χώρου Banach είναι χώρος Banach αν και μόνο αν είναι κλειστός. Είδαμε ότι χώρος-πηλίκο χώρου Banach είναι χώρος Banach.
Είδαμε τί είναι ισομετρική εμφύτευση ενός χώρου με νόρμα σε έναν άλλο χώρο με νόρμα και πότε δύο χώροι με νόρμα λέγονται ισομετρικοί.
Αποδείξαμε ότι κάθε χώρος X με νόρμα έχει μοναδική πλήρωση: δηλαδή ότι υπάρχει χώρος Banach $\overline{X}$ έτσι ώστε ο X να εμφυτεύεται ισομετρικά ως πυκνός υπόχωρος του $\overline{X}$ και ότι δύο τέτοιοι χώροι $\overline{X}$ είναι ισομετρικοί.
Είπαμε πότε δύο νόρμες σε γραμμικό χώρο λέγονται ισοδύναμες και αποδείξαμε ότι σε χώρο πεπερασμένης διάστασης κάθε δύο νόρμες είναι ισοδύναμες.
Ορίσαμε τις p-νόρμες σε χώρο πεπερασμένης διάστασης.

2η εβδομάδα.

Αποδείξαμε ότι σε χώρο πεπερασμένης διάστασης με νόρμα τα συμπαγή υποσύνολα είναι τα ίδια με τα κλειστά και φραγμένα και ότι κάθε τέτοιος χώρος είναι πλήρης.

Είδαμε ότι κάθε υπόχωρος πεπερασμένης διάστασης χώρου με νόρμα είναι κλειστός.

Μελετήσαμε χώρους ακολουθιών, όπως τους l^p, τον c_0 και τον c με τις αντίστοιχες p-νόρμες. Μιλήσαμε για τους χώρους συναρτήσεων $B(A)$, $BC(A)$ με την ομοιόμορφη νόρμα και για τους χώρους $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ με τις p-νόρμες. Επίσης, μιλήσαμε για τους χώρους μέτρων $M(\Omega, \Sigma)$. Τέλος, είδαμε τον χώρο συναρτήσεων $C^{k,p}(U)$ και τον χώρο Sobolev $W^{k,p}(U)$ (την πλήρωση του προηγούμενου).

Ορίσαμε την έννοια της διαχωρισιμότητας και είδαμε ότι οι l^p είναι διαχωρίσιμοι αν $1 \leq p < +\infty$ και ότι ο l^∞ δεν είναι διαχωρίσιμος.

Αποδείξαμε το Λήμμα του F.Riesz: αν ο Y είναι κλειστός υπόχωρος του χώρου με νόρμα X, υπάρχει x στον X με $\|x\| = 1$ ώστε η απόσταση του x από τον Y να είναι όσο θέλουμε κοντά στο 1. Βάσει αυτού αποδείξαμε ότι σε απειροδιάστατο χώρο με νόρμα η κλειστή μοναδιαία μπάλα (όπως και κάθε κλειστή μπάλα) δεν είναι συμπαγής.

Ορίσαμε την έννοια της ομοιόμορφης νόρμας και αποδείξαμε ότι, αν το K είναι πλήρες και κυρτό υποσύνολο του χώρου X με ομοιόμορφα κυρτή νόρμα και το x είναι στον X, τότε υπάρχει μοναδικό στοιχείο του K το οποίο ανάμεσα σε όλα τα στοιχεία του K έχει την ελάχιστη απόσταση από το x.

Ορίσαμε την έννοια του εσωτερικού γινομένου και αποδείξαμε την ανισότητα του Schwarz. Ορίσαμε την νόρμα που επάγεται από εσωτερικό γινόμενο.

Μιλήσαμε για ισομετρική εμφύτευση χώρου με εσωτερικό γινόμενο σε χώρο με εσωτερικό γινόμενο.

Τέλος, αποδείξαμε ότι κάθε νόρμα που επάγεται από εσωτερικό γινόμενο είναι ομοιόμορφα κυρτή.

3η εβδομάδα.

Ορίσαμε την έννοια της ορθογωνιότητας και την έννοια του ορθογώνιου συνόλου $A^\perp$ ενός συνόλου A.

Αποδείξαμε ότι το $A^\perp$ είναι κλειστός υπόχωρος, ότι $\mathrm{cl}\langle A\rangle \subseteq (A^\perp)^\perp$, ότι από $A \subseteq B$ συνεπάγεται $B^\perp \subseteq A^\perp$ και ότι $(\mathrm{cl}\langle A\rangle)^\perp = A^\perp$.

Αποδείξαμε ότι αν ο X είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο και ο Y είναι πλήρης υπόχωρος του X, τότε για κάθε $x \in X$ υπάρχει μοναδικό $y \in Y$ το οποίο ανάμεσα σε όλα τα στοιχεία του Y έχει την ελάχιστη απόσταση από το x. Αυτό το y ονομάζεται προβολή του x στον Y και έχει την ιδιότητα: $x - y \perp Y$.

Με τις ίδιες υποθέσεις (πληρότητα του Y) αποδείξαμε ότι $X = Y + Y^\perp$, $Y \cap Y^\perp = \emptyset$ και $Y = (Y^\perp)^\perp$.

Επομένως, κάθε πλήρης υπόχωρος (ειδικότερα, κάθε κλειστός υπόχωρος χώρου Hilbert) έχει ορθογώνιο συμπλήρωμα.

Επίσης, αν ο $\mathrm{cl}\langle A\rangle$ είναι πλήρης (αυτό ισχύει αυτομάτως αν ο X είναι Hilbert), τότε $\mathrm{cl}\langle A\rangle = (A^\perp)^\perp$ ή, ισοδύναμα, ένα στοιχείο προσεγγίζεται από γραμμικούς συνδυασμούς στοιχείων του A αν και μόνο αν είναι ορθογώνιο σε όλα τα στοιχεία τα οποία είναι ορθογώνια στο A.

Ορίσαμε τις έννοιες του ορθογώνιου συνόλου, του ορθοκανονικού συνόλου, του maximal ορθοκανονικού συνόλου και της ορθοκανονικής βάσης.

Αποδείξαμε ότι ένα ορθογώνιο σύνολο είναι γραμμικώς ανεξάρτητο, ότι μία ορθοκανονική βάση είναι maximal ορθοκανονικό σύνολο και ότι ισχύει και το αντίστροφο αν ο X είναι Hilbert.

Αποδείξαμε το εξής βασικό θεώρημα: κάθε χώρος με εσωτερικό γινόμενο έχει τουλάχιστον ένα maximal ορθοκανονικό σύνολο (και άρα κάθε χώρος Hilbert έχει τουλάχιστον μία ορθοκανονική βάση) και ότι το maximal ορθοκανονικό σύνολο μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε να περιέχει ένα δεδομένο ορθοκανονικό σύνολο. Για την απόδειξη χρησιμοποιήσαμε το Λήμμα του Zorn από την Θεωρία Συνόλων.

Αποδείξαμε την ανισότητα του Bessel:

$$\sum_{a \in A} |(x|a)|^2 \leq \|x\|^2$$

για κάθε ορθοκανονικό σύνολο A και κάθε $x \in X$.

Αποδείξαμε το θεώρημα Riesz-Fischer: αν ο X είναι Hilbert και το A είναι ορθοκανονικό, τότε για κάθε $\kappa_a \in F$ $(a \in A)$ με $\sum_{a \in A} |\kappa_a|^2 < +\infty$, η σειρά $\sum_{a \in A} \kappa_a\, a$ συγκλίνει σε στοιχείο του X και, αν $x = \sum_{a \in A} \kappa_a\, a$, τότε $(x|a) = \kappa_a$ για κάθε $a \in A$ και

$$\|x\|^2 = \sum_{a \in A} |\kappa_a|^2, \qquad (x|y) = \sum_{a \in A} \kappa_a \overline{(y|a)}$$

για κάθε $y \in X$. Είπαμε ότι οι αριθμοί $(x|a)$ $(a \in A)$ ονομάζονται συντελεστές Fourier του x ως προς το ορθοκανονικό σύνολο A και η σειρά

$$\sum_{a \in A} (x|a)\, a$$

ονομάζεται σειρά Fourier του x ως προς το ορθοκανονικό σύνολο A.
Τέλος, αποδείξαμε το θεώρημα: αν ο X είναι Hilbert και το A είναι ορθοκανονική βάση του X, τότε η σειρά Fourier καθενός x ως προς το A συγκλίνει στο x:

$$x = \sum_{a \in A} (x|a)\, a$$

και ισχύουν οι ταυτότητες Parseval:

$$\|x\|^2 = \sum_{a \in A} |(x|a)|^2, \qquad (x|y) = \sum_{a \in A} (x|a)\overline{(y|a)}.$$

Στο δίωρο ασκήσεων/συζήτησης είδαμε με λεπτομέρεια την πληρότητα των χώρων ακολουθιών: l^∞, c, c_0. (Την πληρότητα του l^p, $1 \leq p < +\infty$, την είχαμε δει στις διαλέξεις.) Επίσης είδαμε την πληρότητα των χώρων συναρτήσεων $B(A)$, $BC(A)$ και τονίστηκε η ομοιότητα όλων αυτών των αποδείξεων της πληρότητας χώρων ακολουθιών και χώρων συναρτήσεων. Ακόμη, είδαμε συνοπτικά την πυκνότητα του $C_c(\mathbb{R}^n)$ στον $L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \leq p < +\infty)$. Τέλος αναφέρθηκαν δύο προτάσεις για ολοκληρώματα με παράμετρο: ποιές είναι οι προϋποθέσεις ώστε το ολοκλήρωμα να είναι (i) συνεχής και (ii) παραγωγίσιμη συνάρτηση της παραμέτρου.

4η εβδομάδα.

Αποδείξαμε ότι αν ο Y είναι πλήρης υπόχωρος του χώρου με εσωτερικό γινόμενο X και A είναι ορθοκανονική βάση του Y, τότε η προβολή κάθε $x \in X$ στον Y ισούται με $\sum_{a \in A}(x|a)\, a$.

Αποδείξαμε ότι αν ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο είναι διαχωρίσιμος και έχει άπειρη διάσταση τότε κάθε ορθοκανονική βάση του είναι άπειρη αριθμήσιμη.

Αποδείξαμε το θεώρημα του Schmidt: κάθε χώρος με εσωτερικό γινόμενο ο οποίος είναι διαχωρίσιμος και έχει άπειρη διάσταση έχει ορθοκανονική βάση. Η απόδειξη του θεωρήματος του Schmidt είναι κατασκευαστική.

Είδαμε ότι όλοι οι χώροι Hilbert οι οποίοι είναι διαχωρίσιμοι και έχουν άπειρη διάσταση είναι ανά δύο ισομετρικοί και άρα όλοι ισομετρικοί με τον l^2.

Ορίσαμε τα φραγμένα γραμμικά συναρτησοειδή σε έναν χώρο με νόρμα και είδαμε ότι ένα γραμμικό συναρτησοειδές είναι φραγμένο αν και μόνο αν είναι συνεχές αν και μόνο αν είναι συνεχές στο 0.

Ορίσαμε τον δυικό χώρο X^* ενός χώρου με νόρμα X και είδαμε ότι ο X^* είναι γραμμικός χώρος.

Ορίσαμε την νόρμα $\|x^*\|$ ενός φραγμένου γραμμικού συναρτησοειδούς $x^* \in X^*$ και είδαμε ότι

$$\|x^*\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|x^*(x)|}{\|x\|} = \sup_{\|x\| \leq 1} |x^*(x)| = \sup_{\|x\| = 1} |x^*(x)|.$$

Αποδείξαμε ότι η νόρμα στον X^* έχει τις ιδιότητες νόρμας και ότι ο X^* είναι χώρος Banach (ακόμη κι αν ο X δεν είναι πλήρης).

Αποδείξαμε ότι, αν $1 \leq p < +\infty$, τότε ο δυικός του l^p είναι ισομετρικός με τον l^q, όπου $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Είδαμε ότι ο l^1 εμφυτεύεται ισομετρικά στον δυικό του l^∞. Είδαμε ότι ο δυικός του c_0 είναι ισομετρικός με τον l^1.

Αναφέραμε ότι, αν $1 < p < +\infty$, τότε ο δυικός του $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ είναι ισομετρικός με τον $L^q(\Omega, \Sigma, \mu)$, όπου $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, και ότι, αν το μέτρο μ είναι σ-πεπερασμένο, τότε το ίδιο ισχύει και για $p = 1$. Αναφέραμε ότι ο $L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ εμφυτεύεται ισομετρικά στον δυικό του $L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$.

Τέλος, αναφέραμε ότι, αν ο Ω είναι τοπικά συμπαγής και Hausdorff τοπολογικός χώρος και $\mathcal{B}$ είναι η Borel σ-άλγεβρα του Ω, τότε ο δυικός του $C_0(\Omega)$ είναι ισομετρικός με τον $M_r(\Omega)$, όπου $C_0(\Omega)$ είναι ο χώρος των συνεχών συναρτήσεων στον Ω οι οποίες μηδενίζονται στο ∞ και $M_r(\Omega)$ είναι ο χώρος των κανονικών φραγμένων μέτρων Borel στον Ω.

Τέλος, αποδείξαμε το θεώρημα του Riesz: για κάθε φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές x^* στον χώρο Hilbert X υπάρχει μοναδικό $x \in X$ ώστε να ισχύει

$$x^*(u) = (u|x) \qquad \text{για κάθε } u \in X.$$

Επομένως, κάθε χώρος Hilbert είναι (αντι)ισομετρικός με τον δυικό του.

Στο δίωρο ασκήσεων/συζήτησης λύσαμε τις ασκήσεις 3, 5 και 13[α] του φυλλαδίου 2.

5η εβδομάδα.

Αποδείξαμε το θεώρημα Hahn-Banach στη γενική μορφή του: αν έχουμε έναν γραμμικό χώρο X επί του $F = \mathbb{R}$, έναν γραμμικό υπόχωρο Y του X, ένα θετικά ομογενές υποπροσθετικό συναρτησοειδές p στον X, ένα γραμμικό συναρτησοειδές f στον Y και αν ισχύει $f \leq p$ στον Y, τότε υπάρχει γραμμικό συναρτησοειδές F στον X το οποίο είναι επέκταση του f ώστε να ισχύει $F \leq p$ στον X.

Αν έχουμε έναν γραμμικό χώρο X επί του $F = \mathbb{C}$, περιγράψαμε τη σχέση ανάμεσα σε $\mathbb{C}$-γραμμικά συναρτησοειδή και σε $\mathbb{R}$-γραμμικά συναρτησοειδή στον X.

Αποδείξαμε το θεώρημα Bohnenblust-Sobczyk: αν έχουμε έναν γραμμικό χώρο X επί του $F = \mathbb{C}$, έναν γραμμικό υπόχωρο Y του X, μία ημινόρμα p στον X, ένα γραμμικό συναρτησοειδές f στον Y και αν ισχύει $|f| \leq p$ στον Y, τότε υπάρχει γραμμικό συναρτησοειδές F στον X το οποίο είναι επέκταση του f ώστε να ισχύει $|F| \leq p$ στον X.

Αποδείξαμε το θεώρημα Hahn-Banach στην μορφή του για χώρους με νόρμα: αν έχουμε έναν χώρο με νόρμα X, έναν υπόχωρο Y του X και ένα $y^* \in Y^*$, τότε υπάρχει $x^* \in X^*$ το οποίο είναι επέκταση του y^* ώστε να ισχύει $\|y^*\| = \|x^*\|$.

Είδαμε ότι αν τα $x_1, \ldots, x_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα στον χώρο με νόρμα X και $a_1, \ldots, a_n \in F$, τότε υπάρχει $x^* \in X^*$ ώστε $x^*(x_j) = a_j$ για $j = 1, \ldots, n$.

Αποδείξαμε ότι για κάθε x σε έναν χώρο με νόρμα X ισχύει

$$\|x\| = \max_{\|x^*\| \leq 1} |x^*(x)|.$$

Ορίσαμε την έννοια του μηδενιστή $S^\perp \subseteq X^*$ ενός $S \subseteq X$ και την έννοια του μηδενιστή ${}^\perp S \subseteq X$ ενός $S \subseteq X^*$.

Αποδείξαμε ότι, αν ο X είναι χώρος με νόρμα, ο Y είναι υπόχωρος του X και $x \in X$, τότε

$$\max_{x^* \in Y^\perp, \|x^*\| \leq 1} |x^*(x)| = \inf_{y \in Y} \|x - y\|.$$

Αποδείξαμε ότι, αν ο X είναι χώρος με νόρμα, ο Y είναι υπόχωρος του X και $x^* \in X^*$, τότε

$$\sup_{y \in Y, \|y\| \leq 1} |x^*(y)| = \min_{z^* \in Y^\perp} \|x^* - z^*\|.$$

Αποδείξαμε ότι, αν ο X είναι χώρος με νόρμα, $x \in X$ και $S \subseteq X$, τότε $x \in \mathrm{cl}\langle S \rangle$ αν και μόνο αν $x^*(x) = 0$ για κάθε $x^* \in S^\perp$.

Ορίσαμε τον δεύτερο δυικό X^{**} ενός χώρου με νόρμα X και περιγράψαμε την ισομετρική εμφύτευση

$$J : X \to X^{**}$$

του X μέσα στον X^{**}.

Είπαμε ότι ο X ονομάζεται αυτοπαθής αν η ισομετρική εμφύτευση J είναι επί του X^{**}.

Στο δίωρο ασκήσεων/συζήτησης μιλήσαμε για τις ασκήσεις 1, 2, 3 και 4 του φυλλαδίου 3.

6η εβδομάδα.

Είδαμε ότι αναγκαία συνθήκη για να είναι ένας χώρος με νόρμα αυτοπαθής είναι να είναι πλήρης.

Αποδείξαμε ότι κάθε χώρος Hilbert είναι αυτοπαθής καθώς και ότι οι χώροι l^p $(1 < p < +\infty)$ είναι αυτοπαθείς.

Αναφέραμε ότι και οι χώροι L^p $(1 < p < +\infty)$ είναι αυτοπαθείς καθώς και κάθε πλήρης χώρος με ομοιόμορφα κυρτή νόρμα (χωρίς απόδειξη).

Αποδείξαμε ότι, αν ο X^* είναι διαχωρίσιμος, τότε και ο X είναι διαχωρίσιμος.

Βάσει του τελευταίου ο $(l^\infty)^*$ δεν είναι ισομετρικός με τον l^1 και άρα ο l^1 δεν είναι αυτοπαθής.

Αποδείξαμε το θεώρημα του Baire: αν ο A είναι πλήρης μετρικός χώρος και τα $U_1, U_2, \ldots$ είναι ανοικτά και πυκνά υποσύνολα του A, τότε το $\bigcap_{n=1}^{+\infty} U_n$ είναι πυκνό υποσύνολο του A.

Αποδείξαμε την Αρχή Ομοιόμορφου Φράγματος: αν ο X είναι πλήρης μετρικός χώρος, αν ο Y είναι μετρικός χώρος, αν $y_0 \in Y$, αν $\mathcal{F}$ είναι οποιαδήποτε συλλογή συνεχών συναρτήσεων $f : X \to Y$ και αν $\sup_{f \in \mathcal{F}} d(f(x), y_0) < +\infty$ για κάθε $x \in X$, τότε υπάρχει (μη-κενό) ανοικτό $O \subseteq X$ ώστε $\sup_{x \in O} \sup_{f \in \mathcal{F}} d(f(x), y_0) < +\infty$. [Επεξήγηση: η υπόθεση $\sup_{f \in \mathcal{F}} d(f(x), y_0) < +\infty$ για κάθε $x \in X$ σημαίνει ότι η συλλογή συναρτήσεων $\mathcal{F}$ είναι φραγμένη κατά σημείο στο X ενώ το συμπέρασμα $\sup_{x \in O} \sup_{f \in \mathcal{F}} d(f(x), y_0) < +\infty$ σημαίνει ότι η συλλογή $\mathcal{F}$ είναι φραγμένη ομοιόμορφα στο ανοικτό υποσύνολο O.]

Αποδείξαμε το εξής θεώρημα: αν ο X είναι χώρος Banach, αν $\mathcal{F} \subseteq X^*$ και αν $\sup_{x^* \in \mathcal{F}} |x^*(x)| < +\infty$ για κάθε $x \in X$, τότε $\sup_{x^* \in \mathcal{F}} \|x^*\| < +\infty$.

Αποδείξαμε το δυικό θεώρημα: αν ο X είναι χώρος με νόρμα, αν $\mathcal{F} \subseteq X$ και αν $\sup_{x \in \mathcal{F}} |x^*(x)| < +\infty$ για κάθε $x^* \in X^*$, τότε $\sup_{x \in \mathcal{F}} \|x\| < +\infty$.

Ορίσαμε την ασθενή σύγκλιση στον χώρο με νόρμα X και την ασθενή-$*$ σύγκλιση στον X^*:

$$x_n \stackrel{w}{\to} x \qquad \text{αν} \qquad x^*(x_n) \to x^*(x) \quad \text{για κάθε } x^* \in X^*.$$
$$x_n^* \stackrel{w*}{\to} x^* \qquad \text{αν} \qquad x_n^*(x) \to x^*(x) \quad \text{για κάθε } x \in X.$$

Είδαμε ότι, αν $x_n \to x$, τότε $x_n \stackrel{w}{\to} x$ και ότι, αν $x_n^* \to x^*$, τότε $x_n^* \stackrel{w*}{\to} x^*$. Γι αυτό οι συνήθεις συγκλίσεις (δηλαδή η σύγκλιση ως προς την νόρμα) στον X και στον X^* ονομάζονται και ισχυρές συγκλίσεις.

Αποδείξαμε την μοναδικότητα του ασθενούς ορίου και του ασθενούς-$*$ ορίου.

Είδαμε ότι $e_n \stackrel{w}{\to} 0$ στους l^p $(1 < p < +\infty)$ και $e_n \stackrel{w*}{\to} 0$ στους l^p $(1 < p \leq +\infty)$.

Επίσης είδαμε την σχέση ανάμεσα στην ασθενή και την ασθενή-$*$ σύγκλιση και στις πράξεις στον X και τον X^*.

Είδαμε ότι για κάθε χώρο με εσωτερικό γινόμενο X και κάθε ορθοκανονικό σύνολο $\{e_1, e_2, \ldots\}$ ισχύει $e_n \stackrel{w*}{\to} 0$ και ότι για κάθε χώρο Hilbert και κάθε ορθοκανονικό σύνολο $\{e_1, e_2, \ldots\}$ ισχύει $e_n \stackrel{w}{\to} 0$.

Αποδείξαμε το εξής θεώρημα: αν στον χώρο με νόρμα X έχουμε $x_n \stackrel{w}{\to} x$, τότε $\sup_n \|x_n\| < +\infty$ και $\|x\| \leq \liminf_{n \to +\infty} \|x_n\|$.

Αναφέραμε και το δυικό θεώρημα: αν στον χώρο Banach X έχουμε $x_n^* \stackrel{w*}{\to} x^*$, τότε $\sup_n \|x_n^*\| <$

$+\infty$ και $\|x^*\| \leq \liminf_{n\to+\infty} \|x_n^*\|$. (Στο δεύτερο θεώρημα η πληρότητα χρειάζεται μόνο για το πρώτο συμπέρασμα.)

7η εβδομάδα.

Αν ο X είναι γραμμικός χώρος επί του $\mathbb{R}$ και το $A \subseteq X$ είναι κυρτό, περιέχει το 0 και απορροφά τον X (δηλαδή, για κάθε $x \in X$ υπάρχει $t > 0$ ώστε $x \in tA$) ορίσαμε το συναρτησοειδές Minkowski του A να είναι η $p_A : X \to \mathbb{R}_0^+$ με τύπο

$$p_A(x) = \inf\{t > 0 \,|\, x \in tA\}.$$

Αποδείξαμε ότι το p_A είναι θετικά ομογενές και υποπροσθετικό.

Αποδείξαμε το εξής θεώρημα: αν ο X είναι χώρος με νόρμα, το $A \subseteq X$ είναι κυρτό και περιέχει μια μπάλα $B(0; R)$ και αν $b \in X \setminus A$, τότε υπάρχει $x^* \in X^*$ ώστε να ισχύει $\sup_{a\in A} \operatorname{Re} x^*(a) \leq 1 = \operatorname{Re} x^*(b)$ και $\|x^*\| \leq \frac{1}{R}$.

Αποδείξαμε το θεώρημα του Mazur: αν ο X είναι χώρος με νόρμα, το $A \subseteq X$ είναι κυρτό και περιέχει μια μπάλα $B(0; R)$ και αν το $B \subseteq X$ είναι κυρτό και $A \cap B = \emptyset$, τότε υπάρχει $x^* \in X^*$ ώστε να ισχύει $\sup_{a\in A} \operatorname{Re} x^*(a) \leq 1 = \inf_{b\in B} \operatorname{Re} x^*(b)$ και $\|x^*\| \leq \frac{1}{R}$.

Ορίσαμε την έννοια του ακολουθιακά ασθενώς κλειστού $A \subseteq X$ και την έννοια του ακολουθιακά ασθενώς-$*$ κλειστού $A \subseteq X^*$.

Αποδείξαμε ότι αν το $A \subseteq X$ είναι ακολουθιακά ασθενώς κλειστό τότε είναι κλειστό και ότι αν το $A \subseteq X^*$ είναι ακολουθιακά ασθενώς-$*$ κλειστό τότε είναι κλειστό.

Αποδείξαμε το εξής θεώρημα: αν το $A \subseteq X$ είναι κυρτό και κλειστό, τότε είναι ακολουθιακά ασθενώς κλειστό.

Αποδείξαμε και το εξής ανάλογο θεώρημα: αν ο X είναι αυτοπαθής και το $A \subseteq X^*$ είναι κυρτό και κλειστό, τότε είναι ακολουθιακά ασθενώς-$*$ κλειστό.

Ορίσαμε την έννοια του ακολουθιακά ασθενώς συμπαγούς $K \subseteq X$ και την έννοια του ακολουθιακά ασθενώς-$*$ συμπαγούς $K \subseteq X^*$.

Αποδείξαμε ότι αν το $K \subseteq X$ είναι ακολουθιακά ασθενώς συμπαγές τότε είναι ακολουθιακά ασθενώς κλειστό και φραγμένο.

Αποδείξαμε ότι αν το $K \subseteq X^*$ είναι ακολουθιακά ασθενώς-$*$ συμπαγές τότε είναι ακολουθιακά ασθενώς-$*$ κλειστό και (αν ο X είναι πλήρης) φραγμένο.

Αποδείξαμε το θεώρημα του Helly: αν ο X είναι διαχωρίσιμος και το $K \subseteq X^*$ είναι ακολουθιακά ασθενώς-$*$ κλειστό και φραγμένο τότε είναι ακολουθιακά ασθενώς-$*$ συμπαγές και, ειδικότερα, η κλειστή μοναδιαία μπάλα του X^* είναι ακολουθιακά ασθενώς-$*$ συμπαγής.

Ορίσαμε την έννοια της τοπολογίας $\mathcal{T}$ σε ένα μη-κενό σύνολο X.

Είδαμε τα παραδείγματα $\mathcal{P}(X)$ και $\{\emptyset, X\}$ καθώς και το παράδειγμα ενός μετρικού χώρου.

Μιλήσαμε για ανοικτά, για κλειστά και για συμπαγή υποσύνολα ενός τοπολογικού χώρου.

Ορίσαμε την έννοια του Hausdorff τοπολογικού χώρου και είδαμε ότι κάθε μετρικός χώρος είναι Hausdorff.

Ορίσαμε την έννοια της συνεχούς συνάρτησης $f : X \to Y$ ανάμεσα σε τοπολογικούς χώρους X, Y. Αναφέραμε ότι η $f : X \to Y$ είναι συνεχής αν και μόνο αν για κάθε ανοικτό $U \subseteq Y$ το $f^{-1}(U) \subseteq X$ είναι ανοικτό.

Αποδείξαμε ότι η τομή τοπολογιών στο X είναι τοπολογία στο X.

Ορίσαμε την ελάχιστη τοπολογία $\mathcal{T}(\mathcal{A})$ στο X η οποία περιέχει δοσμένη συλλογή $\mathcal{A}$ υποσυνόλων του X: λέμε ότι η $\mathcal{T}(\mathcal{A})$ παράγεται από την $\mathcal{A}$.

Αποδείξαμε ότι τα στοιχεία της $\mathcal{T}(\mathcal{A})$ είναι όλες οι ενώσεις πεπερασμένων τομών στοιχείων της $\mathcal{A}$.

Αν $\mathcal{F} = \{f_i \mid i \in I\}$ είναι συλλογή συναρτήσεων $f_i : X \to X_i$, όπου κάθε X_i είναι τοπολογικός χώρος, ορίσαμε $\sigma(X, \mathcal{F})$ να είναι η ελάχιστη τοπολογία στο X βάσει της οποίας όλες οι f_i είναι συνεχείς.

Είδαμε ότι η $\sigma(X, \mathcal{F})$ είναι η τοπολογία στο X η οποία παράγεται από την $\mathcal{A} = \{f_i^{-1}(U_i) \mid i \in I, U_i$ ανοικτό στο $X_i\}$. Άρα τα στοιχεία της $\sigma(X, \mathcal{F})$ είναι όλες οι ενώσεις συνόλων της μορφής

$$f_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \cdots \cap f_{i_n}^{-1}(U_{i_n}),$$

όπου κάθε U_{i_k} είναι ανοικτό στον αντίστοιχο X_{i_k}.

Ένα παράδειγμα είναι η τοπολογία-γινόμενο $\sigma(X, \mathcal{F})$ στο καρτεσιανό γινόμενο $X = \prod_{i \in I} X_i$, όπου κάθε X_i είναι τοπολογικός χώρος και $\mathcal{F} = \{\pi_i \mid i \in I\}$ είναι συλλογή των προβολών $\pi_i : X \to X_i$ με $\pi_i(x) = x_i$ για κάθε $x = (x_i)_{i \in I} \in X$.

Είδαμε ότι τα στοιχεία της τοπολογίας-γινόμενο είναι όλες οι ενώσεις συνόλων της μορφής

$$\pi_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \cdots \cap \pi_{i_n}^{-1}(U_{i_n}) = \{x = (x_i)_{i \in I} \mid x_{i_1} \in U_{i_1}, \ldots, x_{i_n} \in U_{i_n}\},$$

όπου κάθε U_{i_k} είναι ανοικτό στον αντίστοιχο X_{i_k}.

Αναφέραμε το θεώρημα του Tychonov: αν κάθε X_i είναι συμπαγής τοπολογικός χώρος τότε το $X = \prod_{i \in I} X_i$ με την τοπολογία-γινόμενο είναι συμπαγής τοπολογικός χώρος.

8η εβδομάδα.

Είδαμε ότι αν για κάθε $i \in I$ ο τοπολογικός χώρος X_i είναι Hausdorff και αν η συλλογή $\mathcal{F}$ συναρτήσεων $f_i : X \to X_i$ είναι **διαχωρίζουσα** (δηλαδή, για κάθε $x_1, x_2 \in X$ με $x_1 \neq x_2$ υπάρχει $i \in I$ ώστε $f_i(x_1) \neq f_i(x_2)$) τότε το X με την τοπολογία $\sigma(X, \mathcal{F})$ είναι Hausdorff.

Για παράδειγμα, είδαμε ότι αν όλοι οι χώροι X_i είναι Hausdorff, τότε και ο $X = \prod_{i\in I} X_i$ με την τοπολογία-γινόμενο είναι Hausdorff.

Κατόπιν, θεωρήσαμε γραμμικό χώρο X επί του F και οποιαδήποτε συλλογή $\mathcal{F}$ *γραμμικών συναρτησοειδών* $f_i : X \to F$. Το F θεωρείται τοπολογικός χώρος με την γνωστή Ευκλείδεια μετρική. Άρα ορίζεται η αντίστοιχη τοπολογία $\sigma(X, \mathcal{F})$ στον γραμμικό χώρο X. Επειδή το F είναι χώρος Hausdorff, αν η $\mathcal{F}$ είναι διαχωρίζουσα τότε ο X με την τοπολογία $\sigma(X, \mathcal{F})$ είναι Hausdorff.

Είδαμε ότι οι πράξεις του γραμμικού χώρου X είναι συνεχείς ως προς την τοπολογία $\sigma(X, \mathcal{F})$. (Δηλαδή: (i) Αν U είναι ανοικτό στον X και $x_1 + x_2 \in U$, τότε υπάρχουν ανοικτά V_1, V_2 στον X ώστε $x_1 \in V_1$, $x_2 \in V_2$ και ώστε να ισχύει $y_1 + y_2 \in U$ για κάθε $y_1 \in V_1$, $y_2 \in V_2$. (ii) Αν U είναι ανοικτό στον X και $\lambda x \in U$, τότε υπάρχουν ανοικτό V στον X και ανοικτό A στο F ώστε $x \in V$, $\lambda \in A$ και ώστε να ισχύει $\kappa y \in U$ για κάθε $y \in V$, $\kappa \in A$.) Αυτό σημαίνει ότι ο X με την τοπολογία $\sigma(X, \mathcal{F})$ είναι ένας **τοπολογικός γραμμικός χώρος**, μία έννοια γενικότερη της έννοιας του χώρου με νόρμα.

Κατόπιν, περιοριστήκαμε στην περίπτωση που ο X είναι *γραμμικός χώρος με νόρμα*. Αν ως $\mathcal{F}$ θεωρήσουμε την συλλογή όλων των *φραγμένων* γραμμικών συναρτησοειδών του X, δηλαδή $\mathcal{F} = X^*$, τότε ορίζουμε την $\sigma(X, X^*)$, η οποία ονομάζεται **ασθενής τοπολογία** στον X.

Είδαμε, ως πόρισμα του θεωρήματος Hahn-Banach, ότι η X^* είναι διαχωρίζουσα και άρα ο X με την ασθενή τοπολογία είναι Hausdorff.

Αναφέραμε, γενικά, ότι αν σε ένα σύνολο X έχουμε δύο τοπολογίες $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$, τότε η $\mathcal{T}_1$ ονομάζεται *ασθενέστερη* της $\mathcal{T}_2$ αν $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ (δηλαδή, κάθε υποσύνολο του X που είναι ανοικτό ως προς την $\mathcal{T}_1$ είναι ανοικτό και ως προς την $\mathcal{T}_2$).

Είδαμε, ως προφανές, ότι η ασθενής τοπολογία $\sigma(X, X^*)$ είναι ασθενέστερη της τοπολογίας που έχει ο X ως χώρος με νόρμα. Γι αυτόν τον λόγο η τοπολογία που έχει ο X ως χώρος με νόρμα ονομάζεται και **ισχυρή τοπολογία** του X.

Τελείως ανάλογα, στον X^* ορίζεται η ασθενής τοπολογία του, $\sigma(X^*, X^{**})$, η οποία είναι κι αυτή τοπολογία Hausdorff.

Όμως, αν θεωρήσουμε την φυσιολογική εμφύτευση $J : X \to X^{**}$, τότε έχουμε και την συλλογή $J(X) \subseteq X^{**}$ ως συλλογή γραμμικών συναρτησοειδών επί του X^* και άρα ορίζεται η τοπολογία $\sigma(X^*, J(X))$ στον X^*, η οποία ονομάζεται **ασθενής-$*$ τοπολογία** του X^*. Λόγω της συνήθους ταύτισης του X με το $J(X)$, η ασθενής-$*$ τοπολογία στον X^* συμβολίζεται συνήθως $\sigma(X^*, X)$.

Είδαμε, ως προφανές, ότι η $\sigma(X^*, X)$ είναι ασθενέστερη της $\sigma(X^*, X^{**})$ και αυτή είναι, φυσικά, ασθενέστερη της ισχυρής τοπολογίας του X^*.

Είδαμε, ως προφανές, ότι ο X^* είναι Hausdorff και με την $\sigma(X^*, X)$.

Αποδείξαμε ότι $x_n \xrightarrow{w} x$ στον X αν και μόνο αν $x_n \to x$ ως προς την $\sigma(X, X^*)$ και ότι $x_n^* \xrightarrow{w*} x^*$ στον X^* αν και μόνο αν $x_n^* \to x^*$ ως προς την $\sigma(X^*, X)$.

Αποδείξαμε ότι, αν $K \subseteq X$ είναι ασθενώς συμπαγές (δηλαδή, συμπαγές ως προς την $\sigma(X, X^*)$), τότε το K είναι ασθενώς κλειστό και φραγμένο.

Αποδείξαμε ότι, αν το $K \subseteq X^*$ είναι ασθενώς-$*$ συμπαγές (δηλαδή, συμπαγές ως προς την $\sigma(X^*, X)$), τότε το K είναι ασθενώς-$*$ κλειστό και (αν ο X είναι πλήρης) φραγμένο.

Αποδείξαμε το θεώρημα του Alaoglou. Αν το $K \subseteq X^*$ είναι ασθενώς-$*$ κλειστό και φραγμένο, τότε είναι ασθενώς-$*$ συμπαγές. Ειδικώτερα, η κλειστή μοναδιαία μπάλα του X^* είναι ασθενώς-$*$ συμπαγής.

Για την απόδειξη αυτού και των προηγουμένων χρειαστήκαμε κάποια εύκολα γενικά αποτελέσματα για τοπολογικούς χώρους.

Αν ο τοπολογικός χώρος X είναι Hausdorff και το $K \subseteq X$ είναι συμπαγές, τότε το K είναι κλειστό.

Αν το K είναι συμπαγές υποσύνολο του τοπολογικού χώρου X και το $F \subseteq K$ είναι κλειστό, τότε το F είναι συμπαγές.

Αν οι X, Y είναι τοπολογικοί χώροι, η $f : X \to Y$ είναι συνεχής και το $K \subseteq X$ είναι συμπαγές, τότε το $f(K) \subseteq Y$ είναι συμπαγές.

Στο δίωρο συζήτησης αποδείξαμε, ως εφαρμογή του θεωρήματος Riesz στους χώρους Hilbert, το Θεώρημα Radon-Nikodym: αν το μ είναι σ-πεπερασμένο μέτρο στον μετρήσιμο χώρο (Ω, Σ), αν το ν είναι μιγαδικό μέτρο στον (Ω, Σ) και αν $\nu \ll \mu$, τότε υπάρχει μοναδική $f \in L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ ώστε να ισχύει

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu, \qquad A \in \Sigma.$$

Η απόδειξη έγινε μόνο στην περίπτωση που $\mu(\Omega) < +\infty$.

9η εβδομάδα.

Συμπληρώσαμε την απόδειξη του Θεωρήματος Alaoglou, αποδεικνύοντας ότι η κλειστή μοναδιαία μπάλα του X^* είναι ασθενώς-$*$ κλειστή.

Αποδείξαμε το εξής θεώρημα: αν το $A \subseteq X$ είναι κυρτό και κλειστό, τότε είναι ασθενώς κλειστό.

Ορίσαμε την έννοια του **φραγμένου γραμμικού τελεστή** και είδαμε ότι ένας γραμμικός τελεστής είναι φραγμένος αν και μόνο αν είναι συνεχής αν και μόνο αν είναι συνεχής στο 0.

Ορίσαμε τον $\mathcal{B}(X,Y)$ για δύο χώρους με νόρμα X,Y και είδαμε ότι ο $\mathcal{B}(X,Y)$ είναι γραμμικός χώρος.

Ορίσαμε την νόρμα $\|T\|$ ενός φραγμένου γραμμικού τελεστή $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ και είδαμε ότι

$$\|T\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|.$$

Αποδείξαμε ότι η νόρμα στον $\mathcal{B}(X,Y)$ έχει τις ιδιότητες νόρμας και ότι, αν ο Y είναι χώρος Banach, ο $\mathcal{B}(X,Y)$ είναι χώρος Banach (ακόμη κι αν ο X δεν είναι πλήρης).

Αν $X = Y$, γράφουμε $\mathcal{B}(X)$ αντί $\mathcal{B}(X,X)$. Επίσης, είδαμε ότι $\mathcal{B}(X,F) = X^*$.

Συμβολίζουμε, όπως στην Γραμμική Άλγεβρα,

$$N(T) = \{x \in X \,|\, Tx = 0\} \subseteq X, \qquad R(T) = \{Tx \,|\, x \in X\} \subseteq Y.$$

Αποδείξαμε ότι, αν $T \in \mathcal{B}(X,Y)$, τότε ο $N(T)$ είναι κλειστός υπόχωρος του X.

Αποδείξαμε ότι, αν $T \in \mathcal{B}(X,Y)$, τότε ο τελεστής $\widetilde{T} : X/N(T) \to Y$ που ορίζεται με τον τύπο

$$\widetilde{T}([x]_{N(T)}) = Tx$$

είναι γραμμικός και φραγμένος και $\|\widetilde{T}\| = \|T\|$ και $R(\widetilde{T}) = R(T)$.

Αποδείξαμε το εξής θεώρημα. Αν $\overline{X}, \overline{Y}$ είναι οι πληρώσεις των X, Y και αν $T \in \mathcal{B}(X,Y)$, τότε υπάρχει μοναδικός $\overline{T} \in \mathcal{B}(\overline{X}, \overline{Y})$ ο οποίος είναι επέκταση του T. Τότε $\|\overline{T}\| = \|T\|$.

Είδαμε ότι, αν $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ και $S \in \mathcal{B}(Y,Z)$, τότε $S \circ T \in \mathcal{B}(X,Z)$ και

$$\|S \circ T\| \leq \|S\|\|T\|.$$

Ορίσαμε την έννοια της **άλγεβρας με νόρμα**. Είπαμε πότε μια άλγεβρα με νόρμα είναι μεταθετική, πότε έχει μοναδιαίο στοιχείο και πότε κάποιο στοιχείο της έχει αντίστροφο στοιχείο. Αν μια άλγεβρα με νόρμα είναι πλήρης τότε λέγεται **άλγεβρα Banach**.

Είδαμε παραδείγματα αλγεβρών με νόρμα. Οι χώροι l^∞, $B(A)$ και $BC(A)$ είναι παραδείγματα μεταθετικών αλγεβρών Banach με μοναδιαίο στοιχείο. Ο χώρος $\mathcal{B}(X)$ είναι μη-μεταθετική (εν γένει) άλγεβρα με νόρμα με μοναδιαίο στοιχείο (τον ταυτοτικό τελεστή I), όπου ως πολλαπλασιασμό στοιχείων του $\mathcal{B}(X)$ θεωρούμε την σύνθεση τελεστών. Είπαμε ότι ο $T \in \mathcal{B}(X)$ είναι αντιστρέψιμος *ως στοιχείο της άλγεβρας* $\mathcal{B}(X)$ αν και μόνο αν είναι ένα-προς-ένα και επί (δηλαδή αντιστρέψιμος ως απεικόνιση) και ο αντίστροφος τελεστής T^{-1} είναι φραγμένος (δηλαδή $T^{-1} \in \mathcal{B}(X)$).

Αν $T \in \mathcal{B}(X,Y)$, ορίσαμε τον **δυικό τελεστή**

$$T' : Y^* \to X^*$$

μέσω του τύπου:

$$(T'y^*)(x) = y^*(Tx), \qquad x \in X,\ y^* \in Y^*.$$

Αποδείξαμε ότι $T' \in \mathcal{B}(Y^*, X^*)$ και

$$\|T'\| = \|T\|.$$

Αναφέραμε τις απλές ιδιότητες

$$(T+S)' = T' + S', \quad (\kappa T)' = \kappa T', \quad (ST)' = T'S', \quad I' = I, \quad 0' = 0, \quad (T^{-1})' = (T')^{-1}.$$

Η τελευταία ιδιότητα ισχύει, φυσικά, με την προϋπόθεση ότι $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ κα $T^{-1} \in \mathcal{B}(Y,X)$.

Αποδείξαμε το εξής θεώρημα. Αν $T \in \mathcal{B}(X,Y)$, τότε $N(T') = R(T)^{\perp}$, $N(T) = {}^{\perp}R(T')$, $\operatorname{cl} R(T') \subseteq N(T)^{\perp}$ και $\operatorname{cl} R(T) = {}^{\perp}N(T')$.

Ως πόρισμα του τελευταίου αποδείξαμε ότι ο $R(T)$ είναι πυκνός στον Y αν και μόνο αν ο T' είναι ένα-προς-ένα και ότι, αν ο $R(T')$ είναι πυκνός στον X^*, τότε ο T είναι ένα-προς-ένα.

Στο δίωρο της συζήτησης χρησιμοποιήσαμε το Θεώρημα Radon-Nikodym για να αποδείξουμε ότι

$$(L^p(\Omega,\Sigma,\mu))^* \overset{iso}{=} L^q(\Omega,\Sigma,\mu)$$

όταν $1 < p, q < +\infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ καθώς και όταν $p = 1, q = +\infty$ και το μ είναι σ-πεπερασμένο. Η απόδειξη έγινε μόνο στην περίπτωση που $\mu(\Omega) < +\infty$. Πιο συγκεκριμένα, αποδείξαμε ότι για κάθε $l \in (L^p(\Omega,\Sigma,\mu))^*$ υπάρχει $f \in L^q(\Omega,\Sigma,\mu)$ ώστε:

$$l(g) = \int_\Omega gf\,d\mu, \qquad g \in L^p(\Omega,\Sigma,\mu).$$

10η εβδομάδα.

Βάσει της Αρχής Ομοιόμορφου Φράγματος αποδείξαμε ότι: αν ο X είναι χώρος Banach και ο Y χώρος με νόρμα και αν $\mathcal{F}$ είναι μια συλλογή τελεστών στον $\mathcal{B}(X,Y)$ τέτοια ώστε $\sup_{T\in\mathcal{F}}\|Tx\|<+\infty$ για κάθε $x\in X$, τότε $\sup_{T\in\mathcal{F}}\|T\|<+\infty$.
Ομοίως, αποδείξαμε το ισχυρότερο: αν ο X είναι χώρος Banach και ο Y χώρος με νόρμα και αν $\mathcal{F}$ είναι μια συλλογή τελεστών στον $\mathcal{B}(X,Y)$ τέτοια ώστε $\sup_{T\in\mathcal{F}}|y^*(Tx)|<+\infty$ για κάθε $x\in X$ και κάθε $y^*\in Y^*$, τότε $\sup_{T\in\mathcal{F}}\|T\|<+\infty$.
Αποδείξαμε το εξής λήμμα: αν ο X είναι χώρος Banach και ο Y είναι χώρος με νόρμα και $T\in\mathcal{B}(X,Y)$, τότε από $\{y\in Y\,|\,\|y\|<1\}\subseteq \mathrm{cl}\{Tx\,|\,\|x\|<k\}$ συνεπάγεται $\{y\in Y\,|\,\|y\|<1\}\subseteq\{Tx\,|\,\|x\|<2k\}$.
Αποδείξαμε το Θεώρημα Ανοικτής Απεικόνισης: αν X,Y είναι χώροι Banach και ο $T\in\mathcal{B}(X,Y)$ είναι επί του Y, τότε (i) υπάρχει M ώστε για κάθε $y\in Y$ με $\|y\|<1$ υπάρχει $x\in X$ με $\|x\|<M$ και $Tx=y$, (i) το $T(U)\subseteq Y$ είναι ανοικτό για καθε ανοικτό $U\subseteq X$, (iii) αν, επιπλέον, ο T είναι ένα προς ένα τότε $T^{-1}\in\mathcal{B}(Y,X)$.
Είπαμε ότι ένας γραμμικός τελεστής $T:X\to Y$ λέγεται **κλειστός** αν από $x_n\to x$ και $Tx_n\to y$ συνεπάγεται $y=Tx$. Είναι προφανές ότι, αν ο T είναι φραγμένος, τότε είναι κλειστός.
Αν οι X,Y είναι χώροι με νόρμα, ορίσαμε τον $X\oplus Y=\{(x,y)\,|\,x\in X, y\in Y\}$ με νόρμα $\|(x,y)\|=\|x\|+\|y\|$ και είπαμε ότι αν οι X,Y είναι πλήρεις, τότε και ο $X\oplus Y$ είναι πλήρης.
Ορίσαμε το **γράφημα** $G(T)=\{(x,Tx)\,|\,x\in X\}\subseteq X\oplus Y$ του γραμμικού τελεστή $T:X\to Y$ και αποδείξαμε ότι ο T είναι κλειστός αν και μόνο αν το $G(T)$ είναι κλειστός υπόχωρος του $X\oplus Y$.
Αποδείξαμε το Θεώρημα Κλειστού Γραφήματος: αν οι X,Y είναι χώροι Banach και ο γραμμικός τελεστής $T:X\to Y$ είναι κλειστός, τότε ο T είναι φραγμένος.
Είδαμε δύο παραδείγματα. Θεωρήσαμε τον τελεστή ακολουθιών στο F με τύπο $T(x_1,x_2,\ldots)=(\kappa_1x_1,\kappa_2x_2,\ldots)$, όπου $\kappa=(\kappa_1,\kappa_2,\ldots)$ είναι μια σταθερή ακολουθία στο F. Αποδείξαμε ότι το να ισχύει $Tx\in L^p$ για κάθε $x\in l^p$ είναι ισοδύναμο με το $\kappa\in l^\infty$ και ότι, σ' αυτήν την περίπτωση, ο $T:l^p\to l^p$ είναι φραγμένος και $\|T\|=\|\kappa\|_\infty$. Για το δεύτερο παράδειγμα πήραμε τον τελεστή $D:C^1([0,1])\to C([0,1])$ με τύπο $Df=f'$ και είδαμε ότι ο D είναι κλειστός αλλά όχι φραγμένος αλλά και ότι ο $C^1([0,1])$ (ως υπόχωρος του $C([0,1])$) δεν είναι χώρος Banach.
Θεωρήσαμε χώρο με νόρμα X και $T\in\mathcal{B}(X)$. Είπαμε ότι το $\lambda\in F$ ανήκει στο **αναλύον σύνολο** του T αν (i) ο $\lambda I-T:X\to X$ είναι ένα προς ένα, (ii) ο $R(\lambda I-T)$ είναι πυκνός υπόχωρος του X και (iii) ο $(\lambda I-T)^{-1}:R(\lambda I-T)\to X$ είναι φραγμένος.
Το **αναλύον σύνολο** του T συμβολίζεται

$$\rho(T).$$

Το συμπλήρωμα του $\rho(T)$ στο F ονομάζεται **φάσμα** του T και συμβολίζεται

$$\sigma(T).$$

Το φάσμα του T χωρίζεται σε τρία ξένα ανά δύο υποσύνολα. Το **σημειακό φάσμα** του T συμβολίζεται

$$\sigma_p(T)$$

και αποτελείται από τα λ για τα οποία ο $\lambda I - T : X \to X$ δεν είναι ένα προς ένα.
Το **περιθωριακό φάσμα** του T συμβολίζεται

$$\sigma_r(T)$$

και αποτελείται από τα λ για τα οποία ο $\lambda I - T : X \to X$ είναι ένα-προς-ένα αλλά ο $R(\lambda I - T)$ δεν είναι πυκνός υπόχωρος του X.
Το **συνεχές φάσμα** του T συμβολίζεται

$$\sigma_c(T)$$

και αποτελείται από τα λ για τα οποία ο $\lambda I - T : X \to X$ είναι ένα-προς-ένα, ο $R(\lambda I - T)$ είναι πυκνός υπόχωρος του X αλλά ο $(\lambda I - T)^{-1} : R(\lambda I - T) \to X$ δεν είναι φραγμένος.
Αν $\lambda \in \sigma_p(T)$, τότε το λ ονομάζεται **ιδιοτιμή** του T. Το λ είναι ιδιοτιμή του T αν και μόνο αν ο $N(\lambda I - T)$ είναι μη-τετριμμένος υπόχωρος του X και τότε ο $N(\lambda I - T)$ ονομάζεται **ιδιόχωρος** του λ ενώ τα μη-μηδενικά $x \in N(\lambda I - T)$, δηλαδή τα $x \in X$, $x \neq 0$ που ικανοποιούν την $Tx = \lambda x$, ονομάζονται **ιδιοδιανύσματα** του λ.

Αποδείξαμε ότι: αν ο X είναι χώρος Banach, ο Y είναι χώρος με νόρμα, $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ και ο $T : X \to R(T)$ έχει φραγμένο αντίστροφο $T^{-1} : R(T) \to X$, τότε ο $R(T)$ είναι κλειστός υπόχωρος του Y.

Βάσει του προηγουμένου, είδαμε ότι, αν ο X είναι χώρος Banach, τότε το $\lambda \in F$ ανήκει στο αναλύον σύνολο του T αν και μόνο αν (i) ο $\lambda I - T : X \to X$ είναι ένα προς ένα, (ii)* $R(\lambda I - T) = X$ και (iii) ο $(\lambda I - T)^{-1} : R(\lambda I - T) \to X$ είναι φραγμένος. Με άλλα λόγια: αν ο X είναι χώρος Banach, τότε το $\lambda \in F$ ανήκει στο αναλύον σύνολο του T αν και μόνο αν $(\lambda I - T)^{-1} \in \mathcal{B}(X)$.

Είδαμε το εξής παράδειγμα. Πήραμε από το προηγούμενο παράδειγμα τον τελεστή $T \in \mathcal{B}(l^2)$ με τύπο $T(x_1, x_2, \ldots) = (\kappa_1 x_1, \kappa_2 x_2, \ldots)$, όπου $\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \ldots) \in l^\infty$. Όπως είδαμε πριν: $\|T\| = \|\kappa\|_\infty$. Αν θέσουμε $K = \{\kappa_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq F$, αποδείξαμε ότι $\sigma_p(T) = K$, ότι $\sigma_r(T) = \emptyset$ και ότι $\sigma_c(T) = (\operatorname{cl} K) \setminus K$. Δηλαδή, $\sigma(T) = \operatorname{cl} K$.

Αποδείξαμε το εξής, χρήσιμο για τα επόμενα, Λήμμα. Αν ο X είναι χώρος Banach, $T \in \mathcal{B}(X)$ και $\|T\| < 1$, τότε $(I - T)^{-1} \in \mathcal{B}(X)$,

$$(I - T)^{-1} = I + T + T^2 + T^3 + \cdots$$

και $\|(I - T)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|T\|}$.

11η εβδομάδα.

Αποδείξαμε ότι, αν ο X είναι χώρος Banach και $T \in \mathcal{B}(X)$, τότε (i) το $\sigma(T)$ είναι συμπαγές και, αν δεν είναι κενό, $\max_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda| \leq \|T\|$, (ii) ο **αναλύων τελεστής**

$$R(\lambda, T) = (\lambda I - T)^{-1} \in \mathcal{B}(X)$$

είναι συνεχής συνάρτηση του λ στο $\rho(T)$ και (iii) $R(\lambda, T) - R(\mu, T) = (\mu - \lambda)R(\lambda, T)R(\mu, T)$ για κάθε $\lambda, \mu \in \rho(T)$.

Αν το $\sigma(T)$ δεν είναι κενό, το

$$r_\sigma(T) = \max_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$$

ονομάζεται **φασματική ακτίνα** του T.

Αποδείξαμε ότι, αν ο X είναι χώρος Banach και $T \in \mathcal{B}(X)$, τότε (i) το $\lim_{n\to+\infty} \|T^n\|^{1/n}$ υπάρχει και είναι $\leq \|T^k\|^{1/k}$ για κάθε k, (ii) αν το $\sigma(T)$ δεν είναι κενό, τότε $r_\sigma(T) \leq \lim_{n\to+\infty} \|T^n\|^{1/n}$, (iii) $R(\lambda, T) = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda^{-k} T^{k-1}$ αν $|\lambda| > \lim_{n\to+\infty} \|T^n\|^{1/n}$ και (iv) αν $|\lambda| < \lim_{n\to+\infty} \|T^n\|^{1/n}$ τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda^{-k} T^{k-1}$ δεν συγκλίνει στον $\mathcal{B}(X)$.

Είπαμε ότι, αν το $U \subseteq \mathbb{C}$ είναι ανοικτό και ο Z είναι χώρος με νόρμα, τότε η $f : U \to Z$ ονομάζεται **ολόμορφη** στο U αν το

$$f'(\lambda) = \lim_{\mu\to\lambda} \frac{f(\mu) - f(\lambda)}{\mu - \lambda}$$

υπάρχει στον Z για κάθε $\lambda \in U$.

Αποδείξαμε ότι αν η $f : U \to Z$ είναι ολόμορφη στο U, τότε για κάθε $z^* \in Z^*$ η $z^* \circ f : U \to \mathbb{C}$ είναι ολόμορφη στο U. Επίσης, αποδείξαμε ότι, αν η $f : \mathbb{C} \to Z$ είναι ολόμορφη και φραγμένη στο $\mathbb{C}$, τότε είναι σταθερή.

Αποδείξαμε ότι, αν ο X είναι χώρος Banach επί του $\mathbb{C}$ και $T \in \mathcal{B}(X)$, τότε (i) ο $R(\lambda, T)$ είναι αναλυτική συνάρτηση του λ στο $\rho(T)$, (ii) το $\sigma(T)$ δεν είναι κενό και

$$r_\sigma(T) = \lim_{n\to+\infty} \|T^n\|^{1/n}.$$

Θεωρήσαμε τον τελεστή *δεξιά μετάθεση* $S_r \in \mathcal{B}(l^2)$ με τύπο $S_r(x_1, x_2, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots)$ και αποδείξαμε ότι $\sigma(S_r) = \{\lambda \,|\, |\lambda| \leq 1\}$, $\sigma_p(S_r) = \emptyset$, $\sigma_r(S_r) = \{\lambda \,|\, |\lambda| < 1\}$ και $\sigma_c(S_r) = \{\lambda \,|\, |\lambda| = 1\}$. Άρα $r_\sigma(S_r) = 1 = \|S_r\|$.

Αν οι X, Y είναι χώροι με νόρμα, είπαμε ότι ένας τελεστής $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ ονομάζεται **συμπαγής** ή **τελείως συνεχής** αν το $\mathrm{cl}(T(B_X))$ είναι συμπαγές υποσύνολο του Y. Το σύνολο των συμπαγών τελεστών συμβολίζεται

$$\mathcal{K}(X, Y).$$

Γράφουμε $\mathcal{K}(X)$ αν $X = Y$.

Αποδείξαμε ότι ο $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ είναι συμπαγής αν και μόνο αν για κάθε φραγμένη ακολουθία (x_n) στον X η (Tx_n) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία στον Y.

Αποδείξαμε ότι ο $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ είναι συμπαγής αν και μόνο αν για κάθε φραγμένο $K \subseteq X$ το

$\mathrm{cl}(T(K)) \subseteq Y$ είναι συμπαγές.

Αποδείξαμε ότι ο $\mathcal{K}(X, Y)$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $\mathcal{B}(X, Y)$.

Αποδείξαμε ότι, αν ο Y είναι πλήρης, τότε ο $\mathcal{K}(X, Y)$ είναι κλειστός υπόχωρος του $\mathcal{B}(X, Y)$.

Αποδείξαμε ότι, αν $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ και $S \in \mathcal{B}(Y, Z)$ και ένας τουλάχιστον από τους T, S είναι συμπαγής, τότε ο $ST \in \mathcal{B}(X, Z)$ είναι συμπαγής.

Αποδείξαμε ότι αν ο $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ έχει $\dim R(T) < +\infty$, τότε ο T είναι συμπαγής.

Θεωρήσαμε τον τελεστή $T \in \mathcal{B}(l^2)$ με τύπο $T(x_1, x_2, \ldots) = (\kappa_1 x_1, \kappa_2 x_2, \ldots)$, όπου $\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \ldots) \in l^\infty$, και αποδείξαμε ότι ο T είναι συμπαγής αν και μόνο αν $\kappa_n \to 0$.

12η εβδομάδα.

Αν ο X είναι χώρος Hilbert και $T \in \mathcal{B}(X)$, αποδείξαμε ότι υπάρχει μοναδικός $T^* \in \mathcal{B}(X)$ ώστε

$$(Tx|y) = (x|T^*y) \qquad \text{για κάθε } x, y \in X.$$

Επίσης, $\|T^*\| = \|T\|$.
Ο T^* ονομάζεται **συζυγής τελεστής** του T. Αν $T^* = T$, ο T ονομάζεται **αυτοσυζυγής**.
Αν $T' \in \mathcal{B}(X^*)$ είναι ο δυικός τελεστής του T και αν $S : X \to X^*$ είναι η ισομετρία του X επί του X^* που προκύπτει από το θεώρημα του Riesz, αποδείξαμε ότι $T^* = S^{-1}T'S$.
Έστω $X = F^n$ και έστω $\{e_1, \ldots, e_n\}$ μια οποιαδήποτε ορθοκανονική βάση του F^n. Αν T είναι γραμμικός τελεστής στον F^n και αν ο αντίστοιχος πίνακας του T είναι ο $A = [a_{ij}]$, είδαμε ότι ο πίνακας του T^* είναι ο $A^\top = [\overline{a_{ji}}]$. Άρα ο T είναι αυτοσυζυγής αν και μόνο αν $A^\top = A$.
Αν ο X είναι χώρος Hilbert και $T \in \mathcal{B}(X)$, είδαμε ότι

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \le 1, \|y\| \le 1} |(Tx|y)|.$$

Συμβολίζουμε $X_\lambda = N(\lambda I - T)$. Δηλαδή, αν το λ δεν είναι ιδιοτιμή του T, τότε $X_\lambda = \{0\}$ ενώ, αν το λ είναι ιδιοτιμή του T, τότε ο $X_\lambda \neq \{0\}$ είναι ο αντίστοιχος ιδιόχωρος.
Αν ο X είναι χώρος Hilbert και ο $T \in \mathcal{B}(X)$ είναι αυτοσυζυγής, αποδείξαμε ότι (i) αν ο Y είναι υπόχωρος του X και $T(Y) \subseteq Y$, τότε $T(Y^\perp) \subseteq Y^\perp$, (ii) ισχύει $(Tx|x) \in \mathbb{R}$ για κάθε $x \in X$ και άρα κάθε ιδιοτιμή του T είναι πραγματική, (iii) ισχύει

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \le 1} |(Tx|x)|,$$

και (iv) αν $\lambda_1 \neq \lambda_2$, τότε $X_{\lambda_1} \perp X_{\lambda_2}$.
Έστω $X = F^n$, έστω $\{e_1, \ldots, e_n\}$ μια οποιαδήποτε ορθοκανονική βάση του F^n και έστω T αυτοσυζυγής γραμμικός τελεστής στον F^n ή, ισοδύναμα, έστω $A^\top = A$ για τον αντίστοιχο πίνακα A του T. Από την γραμμική άλγεβρα γνωρίζουμε ότι υπάρχει ορθοκανονική βάση $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$ του F^n η οποία αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του T. Αυτό δεν ισχύει για χώρους Hilbert άπειρης διάστασης και είδαμε το παρακάτω παράδειγμα.
Έστω $T : L^2([0, 1]) \to L^2([0, 1])$ με τύπο

$$Tf(x) = xf(x) \qquad \text{για κάθε } f \in L^2([0, 1]).$$

Είδαμε ότι ο T είναι φραγμένος τελεστής στον $L^2([0, 1])$ και ότι ο T είναι αυτοσυζυγής. Όμως, ο T δεν έχει καμία ιδιοτιμή. Μάλιστα, είναι $\sigma_p(T) = \sigma_r(T) = \emptyset$ και $\sigma_c(T) = [0, 1]$ και άρα $\sigma(T) = [0, 1]$.
Αποδείξαμε το Φασματικό Θεώρημα για συμπαγείς αυτοσυζυγείς τελεστές. Αν ο X είναι χώρος Hilbert και ο $T \in \mathcal{K}(X)$ είναι αυτοσυζυγής, τότε υπάρχει ορθοκανονική βάση του X η οποία αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του T. Επίσης, για κάθε ιδιοτιμή $\lambda \neq 0$ ισχύει $\dim(X_\lambda) < +\infty$ και για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχουν το πολύ πεπερασμένες ιδιοτιμές λ με $|\lambda| > \epsilon$. Επομένως, αν ο T έχει άπειρες ιδιοτιμές, τότε οι μη-μηδενικές ιδιοτιμές του T σχηματίζουν μια ακολουθία η οποία

συγκλίνει στο 0 και το 0 ανήκει στο φάσμα του T (αλλά ενδέχεται να μην είναι ιδιοτιμή του T).
Θεωρήσαμε το εξής παράδειγμα. Πήραμε Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση $K : [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{C}$ με $M = (\int_0^1 \int_0^1 |K(x,y)|^2 \, dxdy)^{1/2} < +\infty$ και ορίσαμε τον τελεστή

$$T_K f(x) = \int_0^1 K(x,y) f(y) \, dy \qquad \text{για σ.κ. } x \in [0,1].$$

Αποδείξαμε ότι ο T είναι φραγμένος τελεστής στον $L^2([0,1])$ με $\|T\| \leq M$ και, επιπλέον, ότι ο T είναι συμπαγής. Αν ισχύει $K(y,x) = \overline{K(x,y)}$ για σ.κ. $(x,y) \in [0,1]\times[0,1]$, τότε ο T_K είναι αυτοσυζυγής.