

Συναρτησιακή Ανάλυση, εαρινό εξάμηνο 2019-20.

Πρώτο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Έστω χώρος X με νόρμα $\|\cdot\|$. Αποδείξτε ότι:
- (i) $\text{cl}(\{x \in X \mid \|x - a\| < r\}) = \{x \in X \mid \|x - a\| \leq r\}$,
 - (ii) $\text{bd}(\{x \in X \mid \|x - a\| < r\}) = \{x \in X \mid \|x - a\| = r\}$.
- Με $\text{cl}(A)$ και $\text{bd}(A)$ συμβολίζουμε την κλειστότητα και το σύνορο του $A \subseteq X$.
2. Έστω γραμμικός χώρος X και μετρική d στον X η οποία είναι αναλλοίωτη από μεταφορές και θετικά ομογενής:

$$d(x + x_1, x + x_2) = d(x_1, x_2), \quad d(\lambda x_1, \kappa x_2) = |\lambda|d(x_1, x_2)$$

για κάθε $x, x_1, x_2 \in X, \kappa \in F$.

Βρείτε νόρμα στον X από την οποία να επάγεται η μετρική d .

3. Έστω χώρος X με νόρμα και $A, B \subseteq X$.
- (i) Αν το A είναι ανοικτό, αποδείξτε ότι το $A + B$ είναι ανοικτό.
 - (ii) Αν τα A, B είναι συμπαγή, αποδείξτε ότι το $A + B$ είναι συμπαγές.
 - (iii) Αν το A είναι κλειστό και το B συμπαγές, αποδείξτε ότι το $A + B$ είναι κλειστό. Βρείτε παράδειγμα χώρου X με νόρμα στον οποίον το να είναι τα $A, B \subseteq X$ κλειστά δεν συνεπάγεται ότι το $A + B$ είναι κλειστό.
4. Έστω χώρος X με νόρμα και Y κλειστός υπόχωρος του X . Αν ο Y και ο X/Y είναι πλήρεις, αποδείξτε ότι ο X είναι πλήρης.
5. Έστω X ένας γραμμικός χώρος επί του F ο οποίος είναι απειροδιάστατος, και έστω B μία βάση του X . Ορίζουμε νόρμες $\|\cdot\|_1$ και $\|\cdot\|_\infty$ στον X με τύπους:

$$\|x\|_1 = |\lambda_1| + \cdots + |\lambda_n|, \quad \|x\|_\infty = \max\{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|\}$$

για κάθε $x \in X$, όπου $x = \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_n b_n$, με $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in F$ και $b_1, \dots, b_n \in B$, είναι η μοναδική αναπαράσταση του x ως γραμμικός συνδυασμός στοιχείων της βάσης B .

Αποδείξτε ότι οι $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_\infty$ είναι νόρμες στον X και ότι δεν είναι ισοδύναμες.

6. Έστω χώρος X με νόρμα, Y κλειστός υπόχωρος του X και Z υπόχωρος του X με $\dim(Z) < +\infty$ και $Y \cap Z = \{0\}$. Αποδείξτε ότι ο $Y + Z$ είναι κλειστός υπόχωρος του X . Αποδείξτε το ίδιο αποτέλεσμα με τις ίδιες υποθέσεις εκτός της $Y \cap Z = \{0\}$.
7. Έστω χώρος X με νόρμα, Y κλειστός υπόχωρος του X , και Z κλειστός υπόχωρος του X με $\text{codim}(Z) < +\infty$. Αποδείξτε ότι ο $Y + Z$ είναι κλειστός υπόχωρος του X . Με $\text{codim}(Z)$ συμβολίζουμε την διάσταση του X/Z .