Συναρτησιακή Ανάλυση, εαρινό εξάμηνο 2019-20.

Δεύτερο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Θεωρήστε τον l^1 με την 1-νόρμα και τον υπόχωρο $X = \mathrm{span}(\{e_j \mid j \in \mathbb{N}\})$. Αποδείξτε ότι στον X η $\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^2}\, e_j$ συγκλίνει απολύτως αλλά δεν συγκλίνει.
Με $\mathrm{span}(A)$ συμβολίζουμε τον γραμμικό υπόχωρο ο οποίος παράγεται από το σύνολο A.

2. Έστω X χώρος Banach. Τα στοιχεία $b_1, b_2, \ldots$ του X λέμε ότι αποτελούν **βάση Schauder** του X αν για κάθε $x \in X$ υπάρχουν μοναδικά $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \in F$ ώστε $x = \sum_{j=1}^{+\infty} \lambda_j b_j$.
Βρείτε βάση Schauder για καθέναν από τους l^p, $1 \le p < +\infty$. Υπάρχει βάση Schauder για τον l^∞;

3. (i) Έστω χώρος X πεπερασμένης διάστασης με νόρμα $\|\cdot\|$ και γραμμικός υπόχωρος $Y \neq X$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $x \in X$ με $\|x\| = \inf\{\|y - x\| \mid y \in Y\} = 1$.
(ii) Στον $C([0,1])$ με την ομοιόμορφη νόρμα θεωρούμε τους υποχώρους
$$X = \{f \in C([0,1]) \mid f(0) = 0\}, \qquad Y = \Big\{ f \in X \,\Big|\, \int_0^1 f(x)\, dx = 0 \Big\}.$$
Αποδείξτε ότι ο X είναι κλειστός υπόχωρος του $C([0,1])$ και άρα χώρος Banach, ότι $Y \neq X$, ότι ο Y είναι κλειστός υπόχωρος του X και ότι για οποιαδήποτε $f \in X$ με $\|f\|_u = 1$ ισχύει $\inf\{\|g - f\|_u \mid g \in Y\} < 1$.

4. Στον $C([0,1])$ με την ομοιόμορφη νόρμα θεωρούμε το
$$K = \Big\{ g \in C([0,1]) \,\Big|\, g(0) = 1, \int_0^1 g(x)\, dx = 0 \Big\}.$$
Αποδείξτε ότι το K είναι κλειστό και κυρτό υποσύνολο του $C([0,1])$. Αν f είναι η σταθερή συνάρτηση 1 στο $[0,1]$, αποδείξτε ότι
$$\inf_{g \in K} \|g - f\|_u = 1,$$
και ότι δεν υπάρχει καμία $g \in K$ ώστε $\|g - f\|_u = 1$.

5. Έστω χώρος X με εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$ και επαγώμενη νόρμα $\|\cdot\|$.
(i) Αν $\|x_n\| \le 1$, $\|y_n\| \le 1$ και $\langle x_n, y_n \rangle \to 1$, αποδείξτε ότι $\|x_n - y_n\| \to 0$.
(ii) Αν $\|x_n\| \to \|x\|$ και $\langle x_n, y \rangle \to \langle x, y \rangle$ για κάθε $y \in X$, αποδείξτε ότι $\|x_n - x\| \to 0$.

6. Έστω χώρος X με νόρμα $\|\cdot\|$ και έστω ότι ισχύει η ταυτότητα του παραλληλογράμμου:
$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$
για κάθε $x, y \in X$.
Αν $F = \mathbb{R}$ και ορίσουμε
$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}\,\|x + y\|^2 - \frac{1}{4}\,\|x - y\|^2$$
για κάθε $x, y \in X$, αποδείξτε ότι το $\langle \cdot, \cdot \rangle$ είναι εσωτερικό γινόμενο στον X και ότι επάγει την $\|\cdot\|$.
Αν $F = \mathbb{C}$, αποδείξτε το ίδιο πράγμα με το
$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}\,\|x + y\|^2 - \frac{1}{4}\,\|x - y\|^2 + \frac{i}{4}\,\|x + iy\|^2 - \frac{i}{4}\,\|x - iy\|^2$$
για κάθε $x, y \in X$.

7. Στον χώρο l^2 θεωρούμε τους κλειστούς υποχώρους

$$M = \text{clspan}(\{e_{2j} \mid j \in \mathbb{N}\}), \quad Y = \text{clspan}(\{e_{2j} + (1/j)e_{2j-1} \mid j \in \mathbb{N}\}).$$

Αποδείξτε ότι ο $M + Y$ είναι πυκνός στον l^2 και $(1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, 0, \dots) \notin M + Y$. Άρα ο $M + Y$ δεν είναι κλειστός.
Με clspan(A) συμβολίζουμε τον κλειστό γραμμικό υπόχωρο ο οποίος παράγεται από το σύνολο A, δηλαδή το cl(span(A)).

8. Μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to F$ ονομάζεται **συνάρτηση φραγμένης κύμανσης** στο $\mathbb{R}$ αν υπάρχει $M \geq 0$ ώστε να ισχύει

$$\sum_{j=1}^{n-1} |f(t_{j+1}) - f(t_j)| \leq M$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$ με $t_1 < \cdots < t_n$.
Ορίζουμε το σύνολο $BV(\mathbb{R})$ με στοιχεία όλες τις συναρτήσεις φραγμένης κύμανσης στο $\mathbb{R}$, και για κάθε $f \in BV(\mathbb{R})$ ορίζουμε

$$\|f\|_{BV} = |f(0)| + \sup\Big\{ \sum_{j=1}^{n-1} |f(t_{j+1}) - f(t_j)| \,\Big|\, n \in \mathbb{N}, t_1 < \cdots < t_n \Big\}.$$

Αποδείξτε ότι ο $BV(\mathbb{R})$ είναι γραμμικός χώρος επί του F, ότι η $\|\cdot\|_{BV}$ είναι νόρμα στον $BV(\mathbb{R})$ και ότι ο $BV(\mathbb{R})$ είναι χώρος Banach.

9. (i) Έστω $0 < \alpha \leq 1$. Μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to F$ ονομάζεται **συνάρτηση Lipschitz τάξης** α στο $\mathbb{R}$ αν υπάρχει $M \geq 0$ ώστε να ισχύει

$$|f(t) - f(s)| \leq M\delta^\alpha$$

για κάθε $\delta > 0$ και $t, s \in \mathbb{R}$ με $|t - s| \leq \delta$.
Ορίζουμε $Lip_\alpha(\mathbb{R})$ τον χώρο με στοιχεία όλες τις συναρτήσεις Lipschitz τάξης α στο $\mathbb{R}$, και για κάθε $f \in Lip_\alpha(\mathbb{R})$ ορίζουμε

$$\omega_\delta(f) = \sup\{|f(t) - f(s)| \mid |t - s| \leq \delta\}, \quad \|f\|_{Lip_\alpha} = |f(0)| + \sup_{\delta > 0} \frac{\omega_\delta(f)}{\delta^\alpha}.$$

Αποδείξτε ότι ο $Lip_\alpha(\mathbb{R})$ είναι γραμμικός χώρος επί του F, ότι η $\|\cdot\|_{Lip_\alpha}$ είναι νόρμα στον $Lip_\alpha(\mathbb{R})$ και ότι ο $Lip_\alpha(\mathbb{R})$ είναι χώρος Banach.
(ii) Ορίζουμε το σύνολο $lip_\alpha(\mathbb{R})$ με στοιχεία όλες τις συναρτήσεις $f \in Lip_\alpha(\mathbb{R})$ με την ιδιότητα

$$\lim_{\delta \to 0+} \frac{\omega_\delta(f)}{\delta^\alpha} = 0.$$

Αποδείξτε ότι ο $lip_\alpha(\mathbb{R})$ είναι κλειστός υπόχωρος του $Lip_\alpha(\mathbb{R})$.
(iii) Αποδείξτε ότι τα στοιχεία του $Lip_1(\mathbb{R})$ είναι οι απολύτως συνεχείς συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$ των οποίων η παράγωγος ανήκει στον $L^\infty(\mathbb{R})$. Αποδείξτε ότι τα στοιχεία του $lip_1(\mathbb{R})$ είναι οι σταθερές συναρτήσεις.

10. (i) Έστω $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ ο ανοικτός μοναδιαίος δίσκος στο $\mathbb{C}$. Για $1 \leq p < +\infty$ θεωρούμε το σύνολο $H^p(\mathbb{D})$ με στοιχεία όλες τις συναρτήσεις οι οποίες είναι ολόμορφες στο $\mathbb{D}$ με την ιδιότητα

$$\sup_{0 \leq r < 1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \, d\theta < +\infty.$$

Για κάθε $f \in H^p(\mathbb{D})$ ορίζουμε

$$\|f\|_p = \sup_{0 \le r < 1} \Big(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \, d\theta \Big)^{1/p}.$$

Αποδείξτε ότι το $H^p(\mathbb{D})$ είναι γραμμικός χώρος επί του $\mathbb{C}$, ότι η $\| \cdot \|_p$ είναι νόρμα στον $H^p(\mathbb{D})$ και ότι ο $H^p(\mathbb{D})$ είναι χώρος Banach.
(ii) Ορίζουμε το σύνολο $H^\infty(\mathbb{D})$ με στοιχεία όλες τις συναρτήσεις οι οποίες είναι ολόμορφες και φραγμένες στο $\mathbb{D}$. Για κάθε $f \in H^\infty(\mathbb{D})$ ορίζουμε

$$\|f\|_\infty = \sup_{z \in \mathbb{D}} |f(z)|.$$

Αποδείξτε ότι το $H^\infty(\mathbb{D})$ είναι γραμμικός χώρος επί του $\mathbb{C}$, ότι η $\| \cdot \|_\infty$ είναι νόρμα στον $H^\infty(\mathbb{D})$ και ότι ο $H^\infty(\mathbb{D})$ είναι χώρος Banach.
(iii) Ορίζουμε το σύνολο $A(\mathbb{D})$ με στοιχεία όλες τις συναρτήσεις f οι οποίες είναι συνεχείς στο $\mathrm{cl}(\mathbb{D}) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| \le 1\}$ και ολόμορφες στο $\mathbb{D}$. Για κάθε $f \in A(\mathbb{D})$ ορίζουμε

$$\|f\|_\infty = \max_{|z| \le 1} |f(z)|.$$

Αποδείξτε ότι το $A(\mathbb{D})$ είναι γραμμικός χώρος επί του $\mathbb{C}$, ότι η $\| \cdot \|_\infty$ είναι νόρμα στον $A(\mathbb{D})$ και ότι ο $A(\mathbb{D})$ είναι χώρος Banach.

11. (i) Έστω $0 < t \le 1$ και $\kappa, \lambda \in \mathbb{C}$. Αν $1 < p \le 2$, αποδείξτε ότι

$$\big((1+t)^{p-1} + (1-t)^{p-1}\big)|\kappa|^p + \Big(\Big(\frac{1}{t}+1\Big)^{p-1} - \Big(\frac{1}{t}-1\Big)^{p-1}\Big)|\lambda|^p \le |\kappa+\lambda|^p + |\kappa-\lambda|^p.$$

Αν $2 \le p < +\infty$, αποδείξτε ότι η προηγούμενη ανισότητα ισχύει με $\ge$ αντί $\le$.
Αν, επιπλέον, $0 < \lambda \le \kappa$ και $t = \frac{\lambda}{\kappa}$, αποδείξτε ότι η προηγούμενη ανισότητα ισχύει ως ισότητα για κάθε p με $1 < p < +\infty$.
(ii) **Ανισότητες Hanner**. Αν $1 < p \le 2$, αποδείξτε ότι

$$\|x+y\|_p^p + \|x-y\|_p^p \ge \big|\, \|x\|_p + \|y\|_p \big|^p + \big|\, \|x\|_p - \|y\|_p \big|^p$$

για κάθε x, y στον l^p ή σε χώρο πεπερασμένης διάστασης και

$$\|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p \ge \big|\, \|f\|_p + \|g\|_p \big|^p + \big|\, \|f\|_p - \|g\|_p \big|^p$$

για κάθε $f, g \in L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$.
Αν $2 \le p < +\infty$, αποδείξτε ότι ισχύουν οι ίδιες ανισότητες με $\le$ αντί $\ge$.

12. (i) Έστω χώρος X με νόρμα $\| \cdot \|$ η οποία είναι **ομοιόμορφα κυρτή**: για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $x, y \in X$ ισχύει:

$$\|x\| = \|y\| = 1, \ \Big\|\frac{x+2}{2}\Big\| > 1 - \delta \quad \Rightarrow \quad \|x-y\| < \epsilon.$$

Έστω $K \subseteq X$ κυρτό και πλήρες, και $x_0 \in X$. Αποδείξτε ότι υπάρχει μοναδικό $y_0 \in K$ ώστε

$$\|x_0 - y_0\| = \inf\{\|x_0 - y\| \,|\, y \in K\}.$$

(ii) Αν $1 < p < +\infty$, αποδείξτε με βάση την προηγούμενη άσκηση ότι η p-νόρμα στον $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$, στον l^p και σε κάθε χώρο πεπερασμένης διάστασης είναι ομοιόμορφα κυρτή.
(iii) Αποδείξτε ότι η νόρμα οποιουδήποτε χώρου με εσωτερικό γινόμενο είναι ομοιόμορφα κυρτή.