Συναρτησιακή Ανάλυση, εαρινό εξάμηνο 2019-20.

Τέταρτο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Αποδείξτε ότι $e_n \overset{\text{w}}{\to} 0$ στους c, c_0, l^p, $1 < p \leq +\infty$, και ότι η (e_n) δεν έχει ασθενές όριο στον l^1.

2. Έστω $1 < p < +\infty$.
(i) Έστω $x_n = (\lambda_{nk}) \in l^p$ για κάθε n, και $x = (\lambda_k) \in l^p$. Αποδείξτε ότι $x_n \overset{\text{w}}{\to} x$ στον l^p αν και μόνο αν $\sup_n \|x_n\|_p < +\infty$ και $\lambda_{nk} \to \lambda_k$ στο F για κάθε $k \in \mathbb{N}$.
(ii) Έστω $x_n \overset{\text{w}}{\to} x$ στον l^p. Αποδείξτε ότι $x_n \to x$ αν και μόνο αν $\|x_n\| \to \|x\|$.

3. Έστω χώρος με νόρμα X.
(i) Έστω clspan$(L) = X'$. Αν $x'(x_n) \to x'(x)$ για κάθε $x' \in L$ και $\sup_n \|x_n\| < +\infty$, αποδείξτε ότι $x_n \overset{\text{w}}{\to} x$ στον X.
(ii) Έστω clspan$(L) = X$. Αν $x'_n(x) \to x'(x)$ για κάθε $x \in L$ και $\sup_n \|x'_n\| < +\infty$, αποδείξτε ότι $x'_n \overset{\text{w}*}{to} x'$ στον X'.

4. Έστω χώρος μέτρου (Ω, Σ, μ) και ακολουθία (f_n) στον L^1. Αποδείξτε ότι η (f_n) συγκλίνει ασθενώς σε στοιχείο του L^1 αν και μόνον αν $\sup_n \|f_n\|_1 < +\infty$ και το $\lim_{n\to+\infty} \int_A f_n \, d\mu$ υπάρχει στο F για κάθε $A \in \Sigma$.

5. Έστω χώρος μέτρου (Ω, Σ, μ) και $f_n \overset{\text{w}}{\to} f$ στον L^1. Αποδείξτε ότι $f_n \to f$ αν και μόνον αν $f_n \to f$ κατά μέτρο σε κάθε $A \in \Sigma$ με $\mu(A) < +\infty$.

6. Αν ο X είναι αυτοπαθής, αποδείξτε ότι για κάθε $x' \in X'$ υπάρχει $x \in X$ με $\|x\| = 1$ και $x'(x) = \|x'\|$.

7. Έστω χώρος με νόρμα X.
(i) Αν ο Y είναι υπόχωρος του X, αποδείξτε ότι
$$Y' \overset{\text{iso}}{=} X'/Y^{\perp},$$
όπου με το σύμβολο $Z \overset{\text{iso}}{=} W$ δηλώνουμε ότι υπάρχει γραμμική ισομετρία ανάμεσα στους χώρους με νόρμα Z, W.
Υπόδειξη. Θεωρήστε την συνάρτηση $T : Y' \to X'/Y^{\perp}$ με τύπο $T(y') = [x']$ για κάθε $y' \in Y'$, όπου $x' \in X'$ είναι τέτοιο ώστε $x'|_Y = y'$. Αποδείξτε ότι ο ορισμός είναι καλός και ότι η T είναι γραμμική ισομετρία του Y' επί του $X'/Y^{\perp}$.
(ii) Αν ο Y είναι κλειστός υπόχωρος του X, αποδείξτε ότι
$$Y^{\perp} \overset{\text{iso}}{=} (X/Y)'.$$
Υπόδειξη. Για κάθε $x' \in Y^{\perp}$ θεωρήστε την συνάρτηση $T(x') : X/Y \to F$ με τύπο
$$T(x')([x]) = x'(x)$$
για κάθε $[x] \in X/Y$. Αποδείξτε ότι ο ορισμός είναι καλός και ότι η T είναι ισομετρία του $Y^{\perp}$ επί του $(X/Y)'$.

8. Έστω χώρος με νόρμα X και κλειστός υπόχωρος Y του X. Για κάθε $x \in X$ ορίζουμε
$$\mathcal{P}_Y(x) = \big\{ y_0 \in Y \,\big|\, \|x - y_0\| = \inf_{y \in Y} \|x - y\| \big\}.$$
Αν $x \in X \setminus Y$ και $y_0 \in Y$, αποδείξτε ότι $y_0 \in \mathcal{P}_Y(x)$ αν και μόνο αν υπάρχει $x' \in Y^{\perp}$ τέτοιο ώστε
$$\|x'\| = 1, \quad x'(x) = \|x - y_0\|.$$

9. Αν ο X είναι γραμμικός χώρος και $Z \subseteq X$, λέμε ότι το Z είναι *υπερεπίπεδο* του X αν

$$Z = a + Y,$$

όπου $a \in X$ και ο Y είναι γραμμικός υπόχωρος του X τέτοιος ώστε $\mathrm{codim}(Y) = 1$, δηλαδή $\dim(X/Y) = 1$. Είναι γνωστό από την Γραμμική Άλγεβρα ότι το $Z \subseteq X$ είναι υπερεπίπεδο του X αν και μόνο αν υπάρχει γραμμικό συναρτησοειδές l στον X και $c \in F$ ώστε

$$Z = \{x \in X \mid l(x) = c\}.$$

Τώρα, έστω χώρος με νόρμα X. Αποδείξτε ότι για κάθε $x' \in X'$ υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε

$$\|x\| = 1, \quad x'(x) = \|x'\|$$

αν και μόνο αν κάθε κλειστό υπερεπίπεδο του X περιέχει στοιχείο ελάχιστης νόρμας.

10. Αν ο X είναι χώρος Banach, αποδείξτε ότι ο X είναι αυτοπαθής αν και μόνο αν ο X' είναι αυτοπαθής.
Υπόδειξη. Θεωρήστε τις φυσιολογικές εμφυτεύσεις $J_0 : X \to X''$ και $J_1 : X' \to X'''$. Αν ο X είναι αυτοπαθής, πάρτε $x''' \in X'''$, θεωρήστε το $x' = x''' \circ J_0$ και αποδείξτε ότι $x''' = J_1(x')$. Αντιστρόφως, έστω ότι ο X' είναι αυτοπαθής, ενώ ο X δεν είναι. Αποδείξτε ότι ο $J_0(X)$ είναι γνήσιος κλειστός υπόχωρος του X'' και ότι υπάρχει μη-μηδενικό $x''' \in X'''$ με $x'''(J_0(x)) = 0$ για κάθε $x \in X$. Καταλήξτε σε άτοπο.

11. Έστω τοπολογικός χώρος (π.χ. μετρικός χώρος) X και $A \subseteq X$. Το A ονομάζεται σύνολο **πρώτης κατηγορίας** στον X, αν υπάρχουν $A_n \subseteq X$ με $A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ ώστε κάθε $\mathrm{cl}(A_n)$ να έχει κενό εσωτερικό. Το A ονομάζεται σύνολο **δεύτερης κατηγορίας** στον X, αν δεν είναι σύνολο πρώτης κατηγορίας στον X. Ένα σύνολο πρώτης κατηγορίας σε έναν τοπολογικό χώρο θεωρείται *τοπολογικά "μικρό"* σύνολο.
(i) Αποδείξτε ότι αριθμήσιμη ένωση συνόλων πρώτης κατηγορίας στον X είναι σύνολο πρώτης κατηγορίας στον X.
(ii) Αποδείξτε ότι κάθε πλήρης μετρικός χώρος είναι σύνολο δεύτερης κατηγορίας στον εαυτό του.
Υπόδειξη. Θεώρημα του Baire.
(iii) Έστω χώρος με νόρμα X.
Αν το M είναι σύνολο δεύτερης κατηγορίας στον X', $\mathcal{F} \subseteq X$ και $\sup_{x \in \mathcal{F}} |x'(x)| < +\infty$ για κάθε $x' \in M$, αποδείξτε ότι $\sup_{x \in \mathcal{F}} \|x\| < +\infty$.
Αν το M είναι σύνολο δεύτερης κατηγορίας στον X, $\mathcal{F} \subseteq X'$ και $\sup_{x' \in \mathcal{F}} |x'(x)| < +\infty$ για κάθε $x \in M$, αποδείξτε ότι $\sup_{x' \in \mathcal{F}} \|x'\| < +\infty$.
Υπόδειξη. Μιμηθείτε τις αποδείξεις των θεωρημάτων 3.15 και 3.16.

12. (i) Έστω $1 \leq p < +\infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ και ακολουθία $x = (\lambda_k)$ στο F. Αν για κάθε $y = (\mu_k) \in l^p$ η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k \mu_k$ συγκλίνει, αποδείξτε ότι $x \in l^q$.
Υπόδειξη: Για κάθε n θεωρήστε το $l_n \in (l^p)'$ με τύπο $l_n(y) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mu_k$ για κάθε $y = (\mu_k) \in l^p$. Η νόρμα του l_n είναι γνωστή. Κατόπιν, εφαρμόστε το θεώρημα 3.15.
(ii) Έστω ακολουθία $x = (\lambda_k)$ στο F. Αν για κάθε $y = (\mu_k) \in c_0$ η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k \mu_k$ συγκλίνει, αποδείξτε ότι $x \in l^1$.

13. Έστω (Ω, Σ, μ) ένας χώρος μέτρου και μετρήσιμη $f : \Omega \to F$.
(i) Έστω $1 < p \leq +\infty$ και $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Αν $fg \in L^1$ για κάθε $g \in L^p$, αποδείξτε ότι $f \in L^q$.
(ii) Έστω ότι το μ είναι σ-πεπερασμένο. Αν $fg \in L^1$ για κάθε $g \in L^1$, αποδείξτε ότι $f \in L^\infty$.

14. Έστω $C(\mathbb{T})$ ο χώρος Banach ο οποίος αποτελείται από τις 2π-περιοδικές συνεχείς συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to F$. Η νόρμα του $C(\mathbb{T})$ είναι η $\|\cdot\|_u$, η οποία ορίζεται από τον τύπο

$$\|f\|_u = \max_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|.$$

(i) Για κάθε $f \in C(\mathbb{T})$ ορίζουμε τους **συντελεστές Fourier** της f:

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,dt, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Επίσης, ορίζουμε την **σειρά Fourier** της f:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)e^{int}.$$

Τα **συμμετρικά μερικά αθροίσματα** της σειράς Fourier της f συμβολίζονται

$$S_n(f)(t) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)e^{ikt}, \quad n \in \mathbb{Z}, n \geq 0, t \in \mathbb{R}.$$

Λέμε ότι η σειρά Fourier της f συγκλίνει στην f στο σημείο t αν

$$S_n(f;t) \to f(t) \quad \text{όταν } n \to +\infty.$$

Αποδείξτε ότι

$$S_n(f;t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(s)\frac{\sin\frac{(2n+1)(t-s)}{2}}{\sin\frac{t-s}{2}}\,ds.$$

(ii) Αποδείξτε ότι για κάθε t και κάθε n το $S_n(\cdot\,;t)$ είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές στον $C(\mathbb{T})$ με νόρμα

$$\|S_n(\cdot\,;t)\| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{\sin\frac{(2n+1)s}{2}}{\sin\frac{s}{2}}\right|ds = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\left|\sin\frac{(2n+1)s}{2}\right|}{\sin\frac{s}{2}}\,ds.$$

(iii) Αποδείξτε ότι $\|S_n(\cdot\,;t)\| \to +\infty$ όταν $n \to +\infty$.
(iv) Αποδείξτε ότι για κάθε t υπάρχει $f \in C(\mathbb{T})$ ώστε $|S_n(f;t)| \to +\infty$ όταν $n \to +\infty$ και άρα η σειρά Fourier της f δεν συγκλίνει στην f στο t.
(v) Αν το $A \subseteq \mathbb{R}$ είναι αριθμήσιμο, αποδείξτε ότι το σύνολο των $f \in C(\mathbb{T})$ με την ιδιότητα η σειρά Fourier της f να συγκλίνει στην f σε ένα τουλάχιστον $t \in A$ είναι πρώτης κατηγορίας στον $C(\mathbb{T})$ (δείτε την άσκηση 11).

15. Έστω χώρος Banach X με νόρμα $\|\cdot\|$ και μία βάση Schauder $B = \{b_1, b_2, \ldots\}$ του X (δείτε το δεύτερο φυλλάδιο ασκήσεων). Θεωρούμε

$$Y = \left\{ y = (\lambda_k) \text{ ακολουθία στο } F \,\middle|\, \text{η σειρά } \sum_{k=1}^{+\infty}\lambda_k b_k \text{ συγκλίνει στον } X \right\}$$

καθώς και

$$\|y\|_Y = \sup_n \left\|\sum_{k=1}^{n}\lambda_k b_k\right\| \quad \text{για κάθε } y = (\lambda_k) \in Y.$$

(i) Αποδείξτε ότι η $\|\cdot\|_Y$ είναι νόρμα στον Y και ότι ο Y με αυτήν την νόρμα είναι χώρος Banach.
(ii) Θεωρούμε $T : Y \to X$ με τύπο

$$T(y) = \sum_{k=1}^{+\infty}\lambda_k b_k \quad \text{για κάθε } y = (\lambda_k) \in Y.$$

Αποδείξτε ότι υπάρχουν σταθερές c_1, c_2 με $0 < c_1 \leq c_2$ ώστε να ισχύει

$$c_1\|y\|_Y \leq \|T(y)\| \leq c_2\|y\|_Y \quad \text{για κάθε } y \in Y.$$

(iii) Θεωρούμε

$$Z = \Big\{ z = (\kappa_k) \text{ ακολουθία στο } F \,\Big|\, \text{η σειρά } \sum_{k=1}^{+\infty} \kappa_k \lambda_k \text{ συγκλίνει για κάθε } (\lambda_k) \in Y \Big\}$$

και

$$\|z\|_Z = \sup_{y=(\lambda_k)\in Y, \|T(y)\|\leq 1} \Big| \sum_{k=1}^{+\infty} \kappa_k \lambda_k \Big| \quad \text{για κάθε } z = (\kappa_k) \in Z.$$

Αποδείξτε ότι η $\|\cdot\|_Z$ είναι νόρμα στον Z και ότι $Z \overset{\text{iso}}{=} X'$.

16. Έστω χώρος X με νόρμα $\|\cdot\|$, και υπόχωρος L του X'. Λέμε ότι ο L **προσδιορίζει την νόρμα** του X αν υπάρχει $c > 0$ ώστε

$$c\|x\| \leq \sup_{x'\in L,\, \|x'\|\leq 1} |x'(x)| \quad \text{για κάθε } x \in X.$$

Τώρα έστω χώρος X με νόρμα $\|\cdot\|$, και υπόχωρος L του X' ο οποίος προσδιορίζει την νόρμα του X.
(i) Θέτουμε

$$\|x\|' = \sup_{x'\in L, \|x'\|\leq 1} |x'(x)| \quad \text{για κάθε } x \in X.$$

Αποδείξτε ότι η $\|\cdot\|'$ είναι νόρμα στον X ισοδύναμη με την $\|\cdot\|$.
(ii) Αν $\mathcal{F} \subseteq X$ και $\sup_{x\in\mathcal{F}} |x'(x)| < +\infty$ για κάθε $x' \in L$, δείξτε ότι $\sup_{x\in\mathcal{F}} \|x\| < +\infty$.

17. (Schur) Αποδείξτε ότι $x_n \xrightarrow{\text{w}} x$ στον l^1 αν και μόνο αν $x_n \to x$ στον l^1.

18. Αν ο X είναι αυτοπαθής χώρος με νόρμα και ο Y είναι κλειστός υπόχωρος του X, αποδείξτε ότι ο X/Y είναι αυτοπαθής.

19. Έστω χώρος με νόρμα X.
Η ακολουθία (x_n) στον X ονομάζεται **ασθενώς συγκλίνουσα**, αν το $\lim_{n\to+\infty} x'(x_n)$ υπάρχει στο F για κάθε $x' \in X'$. Ο X ονομάζεται **ακολουθιακά ασθενώς πλήρης**, αν κάθε ασθενώς συγκλίνουσα ακολουθία του X συγκλίνει ασθενώς σε κάποιο στοιχείο του.
Η ακολουθία (x'_n) στον X' ονομάζεται **ασθενώς$*$ συγκλίνουσα**, αν το $\lim_{n\to+\infty} x'_n(x)$ υπάρχει στο F για κάθε $x \in X$. Ο X' ονομάζεται **ακολουθιακά ασθενώς$*$ πλήρης**, αν κάθε ασθενώς$*$ συγκλίνουσα ακολουθία του X' συγκλίνει ασθενώς$*$ σε κάποιο στοιχείο του.
(i) Έστω συμπαγής, Hausdorff τοπολογικός χώρος (π.χ. συμπαγής μετρικός χώρος) Ω και ακολουθία (f_n) στον $C(\Omega)$ η οποία συγκλίνει κατά σημείο στο Ω σε μία $f : \Omega \to F$ η οποία δεν είναι συνεχής στο Ω. Αν $\sup_n \|f_n\|_u < +\infty$, αποδείξτε ότι η (f_n) είναι ασθενώς συγκλίνουσα στον $C(\Omega)$, αλλά ότι δεν συγκλίνει ασθενώς σε κανένα στοιχείο του $C(\Omega)$.
(ii) Αν ο X είναι αυτοπαθής χώρος με νόρμα, αποδείξτε ότι ο X είναι ακολουθιακά ασθενώς πλήρης.
Υπόδειξη. Έστω ακολουθία (x_n) στον X ώστε το $\lim_{n\to+\infty} x'(x_n)$ να υπάρχει στο F για κάθε $x' \in X'$. Θέσατε $x''(x') = \lim_{n\to+\infty} x'(x_n)$ και αποδείξτε ότι $x'' \in X''$.
(iii) Αν ο X είναι χώρος Banach, αποδείξτε ότι ο X' είναι ακολουθιακά ασθενώς$*$ πλήρης.
(iv) Έστω χώρος μέτρου (Ω, Σ, μ). Αποδείξτε ότι ο L^1 είναι ακολουθιακά ασθενώς πλήρης.

20. (Vitali-Hahn-Saks) (i) Έστω χώρος μέτρου (Ω, Σ, μ), ακολουθία μιγαδικών μέτρων (λ_n) επί της Σ και έστω ότι κάθε λ_n είναι απολύτως συνεχές ως προς το μ, και ότι το $\lim_{n\to+\infty} \lambda_n(A)$ υπάρχει στο F για κάθε $A \in \Sigma$. Θέτουμε

$$\lambda(A) = \lim_{n\to+\infty} \lambda_n(A) \quad \text{για κάθε } A \in \Sigma.$$

Αποδείξτε ότι το λ είναι μιγαδικό μέτρο επί της Σ απολύτως συνεχές ως προς το μ.
(ii) Έστω μετρήσιμος χώρος (Ω, Σ), ακολουθία μιγαδικών μέτρων (λ_n) επί της Σ και έστω ότι το $\lim_{n\to+\infty} \lambda_n(A)$ υπάρχει στο F για κάθε $A \in \Sigma$. Θέτουμε

$$\lambda(A) = \lim_{n\to+\infty} \lambda_n(A) \quad \text{για κάθε } A \in \Sigma.$$

Αποδείξτε ότι το λ είναι μιγαδικό μέτρο επί της Σ.

21. (i) Έστω χώρος Banach X, $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$ και $f : [a, b] \to X$ συνεχής στο $[a, b]$. Αποδείξτε ότι υπάρχει μοναδικό $x \in X$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε διαμέριση $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$ με $\max_{1\leq j\leq n} |t_j - t_{j-1}| < \delta$ και κάθε επιλογή σημείων $\xi_1, \ldots, \xi_n$ με $t_{j-1} \leq \xi_j \leq t_j$ ισχύει

$$\Big\| \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(t_j - t_{j-1}) - x \Big\| < \epsilon.$$

Αυτό το $x \in X$ ονομάζεται **ολοκλήρωμα Riemann** της f και συμβολίζεται $\int_a^b f(t)\,dt$.
(ii) Έστω χώρος Banach X, $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$ και $f : [a, b] \to X$ συνεχής στο $[a, b]$. Παρατηρήστε ότι για κάθε $x' \in X'$ η συνάρτηση $x' \circ f : [a, b] \to F$ είναι συνεχής στο $[a, b]$ με τιμές στο F και, επομένως, ορίζεται στο πλαίσιο του Απειροστικού Λογισμού το $\int_a^b x'(f(t))\,dt$. Αποδείξτε ότι

$$\int_a^b x'(f(t))\,dt = x'\Big(\int_a^b f(t)\,dt\Big).$$

(iii) Έστω χώρος Banach X, $a, b, c \in \mathbb{R}$ με $a < c < b$, $f, g : [a, b] \to X$ συνεχείς στο $[a, b]$ και $\lambda \in F$. Αποδείξτε τις αναμενόμενες ιδιότητες:

$$\int_a^b (f(t) + g(t))\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt, \qquad \int_a^b \lambda f(t)\,dt = \lambda \int_a^b f(t)\,dt,$$

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt, \qquad \Big|\int_a^b f(t)\,dt\Big| \leq (b-a) \sup_{a\leq t\leq b} \|f(t)\|.$$

22. Έστω χώρος Banach X επί του $\mathbb{C}$, ανοικτό υποσύνολο U του $\mathbb{C}$ και $f : U \to X$.
Η f ονομάζεται **ολόμορφη** στο U αν υπάρχει $g : U \to X$ ώστε

$$\lim_{\mathbb{C}\ni h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = g(z) \quad \text{για κάθε } z \in U.$$

Τότε η g ονομάζεται **παράγωγος** της f και συμβολίζεται $\frac{df}{dz}$.
Η f ονομάζεται **ασθενώς ολόμορφη** στο U αν η $x' \circ f : U \to \mathbb{C}$ είναι ολόμορφη στο U (με τη γνωστή έννοια) για κάθε $x' \in X'$.
[α] Αποδείξτε ότι η f είναι ολόμορφη στο U αν και μόνο αν είναι ασθενώς ολόμορφη στο U, και ότι τότε

$$\frac{d(x' \circ f)}{dz} = x' \circ \frac{df}{dz}$$

για κάθε $x' \in X'$.
[β] Έστω $\lambda \in \mathbb{C}$ και $f, g : U \to X$ και $h : U \to \mathbb{C}$ ολόμορφες στο U.
(i) Αποδείξτε ότι οι λf, $f + g$ και hg είναι ολόμορφες στο U.
(ii) Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στο U και, επομένως, ορίζεται το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_a^b f(z(t)) \frac{dz}{dt}(t)\, dt$$

για κάθε καμπύλη γ στο U με παραμετρικοποίηση $z : [a, b] \to U$, όπου η $\frac{dz}{dt}$ είναι συνεχής στο $[a, b]$. (Δείτε την άσκηση 18 για τον ορισμό του ολοκληρώματος Riemann συνάρτησης με τιμές σε χώρο Banach.)
(iii) (Θεώρημα του Cauchy) Αν το U είναι απλά συνεκτικό ή, γενικότερα, αν η γ είναι ομόλογη του μηδενός ως προς το U (δηλαδή ισχύει $\mathrm{ind}(\gamma; w) = 0$ για κάθε $w \in \mathbb{C} \setminus U$), αποδείξτε ότι

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0.$$

(iv) (Τύπος του Cauchy) Αν το U είναι απλά συνεκτικό ή, γενικότερα, αν η γ είναι ομόλογη του μηδενός ως προς το U, αποδείξτε ότι

$$f(z_0)\, \mathrm{ind}(\gamma; z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz \quad \text{για κάθε } z_0 \in U.$$

(v) (Ανάπτυγμα Taylor) Αποδείξτε ότι για κάθε $z_0 \in U$ υπάρχουν $a_0, a_1, \ldots \in X$ ώστε να ισχύει

$$f(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{για κάθε } z \in D(z_0; R),$$

όπου $R = \mathrm{dist}(z_0, \mathbb{C} \setminus U)$. Αποδείξτε ότι

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0;r)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}}\, dz,$$

όπου $C(z_0; r)$ είναι η περιφέρεια κέντρου z_0 και ακτίνας $r < R$ με την παραμετρικοποίηση $z(t) = z_0 + re^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$.
(vi) (Αρχή Μεγίστου) Αν υπάρχει $z_0 \in U$ ώστε να ισχύει

$$\|f(z)\| \le \|f(z_0)\| \quad \text{για κάθε } z \in U,$$

αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή στην συνεκτική συνιστώσα του U η οποία περιέχει το z_0.
(vii) (Θεώρημα του Liouville) Αν $U = \mathbb{C}$ και $\sup_{z \in \mathbb{C}} \|f(z)\| < +\infty$, αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή στο $\mathbb{C}$.