Συναρτησιακή Ανάλυση, εαρινό εξάμηνο 2019-20.

Έκτο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Έστω χώροι με νόρμα X, Y και γραμμικός τελεστής $T : X \to Y$. Αποδείξτε ότι ο $T : X \to R(T)$ έχει φραγμένο αντίστροφο αν και μόνο αν υπάρχει $c > 0$ ώστε να ισχύει
$$c\|x\| \leq \|T(x)\| \quad \text{για κάθε } x \in X.$$
Σε αυτήν την περίπτωση, αποδείξτε ότι, αν ο X είναι χώρος Banach, ο υπόχωρος $\mathrm{R}(T)$ του Y είναι κλειστός.

2. Έστω χώρος Hilbert X και $T \in L(X)$, και έστω ότι υπάρχει $c > 0$ ώστε να ισχύει
$$\mathrm{Re}(\langle T(x), x\rangle) \geq c\|x\|^2 \quad \text{για κάθε } x \in X.$$
(i) Αποδείξτε ότι οι T, T^* είναι ένα-προς-ένα στον X.
(ii) Αποδείξτε ότι οι T, T^* είναι επί του X.
Υπόδειξη. Πρώτα αποδείξτε ότι οι $\mathrm{R}(T), \mathrm{R}(T^*)$ είναι κλειστοί υπόχωροι του X.
(iii) Αποδείξτε ότι οι T, T^* έχουν φραγμένους αντίστροφους.

3. Έστω χώρος Hilbert X, και αυτοσυζυγής $T \in L(X)$.
(i) Αποδείξτε ότι ισχύει $\langle T(x), x\rangle \in \mathbb{R}$ για κάθε $x \in X$.
(ii) Αποδείξτε ότι
$$\|T\| = \sup_{x\in X, \|x\|\leq 1} |\langle T(x), x\rangle|.$$
Υπόδειξη. Αν $m = \sup_{x\in X,\|x\|\leq 1} |\langle T(x), x\rangle|$, τότε είναι προφανές ότι $m \leq \|T\|$. Κατόπιν, αποδείξτε ότι, αν $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε
$$4|\lambda\,\mathrm{Re}(\langle T(x), y\rangle)| \leq m(\|x+\lambda y\|^2+\|x-\lambda y\|^2) = 2m(\|x\|^2+\lambda^2\|y\|^2) \ \text{ για κάθε } x, y \in X.$$
Με κατάλληλη επιλογή του λ αποδείξτε ότι $|\,\mathrm{Re}(\langle T(x), y\rangle)| \leq m\|x\|\|y\|$ και από αυτό ότι $|\langle T(x), y\rangle| \leq m\|x\|\|y\|$ για κάθε $x, y \in X$.

4. Έστω χώρος Hilbert X και $T \in L(X)$. Αποδείξτε ότι οι $I + T^*T$ και $I + TT^*$ είναι αυτοσυζυγείς και έχουν φραγμένους αντίστροφους.
Υπόδειξη. Αποδείξτε ότι $\langle (I + T^*T)(x), x\rangle \geq \|x\|^2$ για κάθε $x \in X$. Χρησιμοποιήστε και την δεύτερη άσκηση.

5. Έστω χώρος Hilbert X και $B : X \times X \to F$ με τις ιδιότητες:
(i) $B(x + y, z) = B(x, z) + B(y, z)$, $B(\lambda x, z) = \lambda B(x, z)$ για κάθε $x, y, z \in X$, $\lambda \in F$,
(ii) $B(x, y + z) = B(x, y) + B(x, z)$, $B(x, \lambda z) = \overline{\lambda} B(x, z)$ για κάθε $x, y, z \in X$, $\lambda \in F$,
(iii) υπάρχει $C > 0$ ώστε $|B(x, y)| \leq C\|x\|\|y\|$ για κάθε $x, y \in X$,
(iv) υπάρχει $c > 0$ ώστε $\mathrm{Re}(B(x, x)) \geq c\|x\|^2$ για κάθε $x \in X$.
Αποδείξτε ότι υπάρχει $T \in L(X)$ με φραγμένο αντίστροφο $T^{-1} \in L(X)$ ώστε $\|T\| \leq C$, $\|T^{-1}\| \leq \frac{1}{c}$ και
$$B(x, y) = \langle x, T(y)\rangle \quad \text{για κάθε } x, y \in X.$$