

Συναρτησιακή Ανάλυση, εαρινό εξάμηνο 2019-20.

Έβδομο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Έστω χώρος Banach X και χώρος με νόρμα Y . Αν ο $T \in L(X, Y)$ είναι επί του Y και ανοικτή απεικόνιση, αποδείξτε ότι ο Y είναι πλήρης.
Υπόδειξη. Θεωρήστε τον $N(T) = \{x \in X \mid T(x) = 0\}$ και τον φραγμένο τελεστή $\tilde{T} : X/N(T) \rightarrow Y$ ο οποίος ορίζεται με τύπο $\tilde{T}([x]_{N(T)}) = T(x)$ και αποδείξτε ότι ο \tilde{T} είναι ανοικτή απεικόνιση.
2. Έστω χώροι με νόρμα X, Y και γραμμικός τελεστής $T : X \rightarrow Y$. Αν $y' \circ T \in X'$ για κάθε $y' \in Y'$, αποδείξτε ότι $T \in L(X, Y)$.
Υπόδειξη. Αρχή ομοιόμορφου φράγματος.
3. (i) Έστω χώροι με νόρμα X, Y ένας τουλάχιστον εκ των οποίων είναι χώρος Banach. Αν η $B : X \times Y \rightarrow F$ έχει την ιδιότητα ότι για κάθε $x \in X$ ισχύει $B(x, \cdot) \in Y'$ και για κάθε $y \in Y$ ισχύει $B(\cdot, y) \in X'$, αποδείξτε ότι υπάρχει $C \geq 0$ ώστε να ισχύει $|B(x, y)| \leq C\|x\|\|y\|$ για κάθε $x \in X$ και $y \in Y$.
Υπόδειξη. Αρχή ομοιόμορφου φράγματος.
(ii) Έστω χώρος Hilbert X και γραμμικός τελεστής $T : X \rightarrow X$ ώστε να ισχύει $\langle T(x), y \rangle = \langle x, T(y) \rangle$ για κάθε $x, y \in X$. Αποδείξτε ότι $T \in L(X)$.
4. Έστω χώρος με νόρμα X και ακολουθία (x_n) στον X ώστε να ισχύει $\sum_{n=1}^{+\infty} |x'(x_n)| < +\infty$ για κάθε $x' \in X'$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $C \geq 0$ ώστε να ισχύει $\sum_{n=1}^{+\infty} |x'(x_n)| \leq C\|x'\|$ για κάθε $x' \in X'$.
Υπόδειξη. Αρχή ομοιόμορφου φράγματος με τις συναρτήσεις $f_N(x') = \sum_{n=1}^N |x'(x_n)|$.
5. Έστω κλειστός υπόχωρος X του $L^1([0, 1])$. Αν για κάθε $f \in X$ υπάρχει $p > 1$ ώστε $f \in L^p([0, 1])$, αποδείξτε ότι υπάρχει $p > 1$ ώστε $X \subseteq L^p([0, 1])$.
Υπόδειξη. Αρχή ομοιόμορφου φράγματος.
6. Έστω γραμμικός χώρος X με δύο νόρμες $\|\cdot\|_1$ και $\|\cdot\|_2$, ο οποίος είναι πλήρης και με τις δύο νόρμες. Αν υπάρχει $C > 0$ ώστε να ισχύει $\|x\|_1 \leq C\|x\|_2$ για κάθε $x \in X$, αποδείξτε ότι οι δύο νόρμες είναι ισοδύναμες.
Υπόδειξη. Θεώρημα ανοικτής απεικόνισης.
7. Έστω κλειστός υπόχωρος X του $L^1([0, 2])$ ώστε για κάθε $f \in L^1([0, 1])$ να υπάρχει $F \in X$ της οποίας ο περιορισμός στο $[0, 1]$ είναι η f . Αποδείξτε ότι υπάρχει $C \geq 0$ ώστε για κάθε $f \in L^1([0, 1])$ να υπάρχει $F \in X$ με $\|F\|_1 \leq C\|f\|_1$ της οποίας ο περιορισμός στο $[0, 1]$ είναι η f .
Υπόδειξη. Θεώρημα ανοικτής απεικόνισης.
8. Έστω γραμμικός χώρος X με δύο νόρμες $\|\cdot\|_1$ και $\|\cdot\|_2$, ο οποίος είναι πλήρης και με τις δύο νόρμες. Υποθέτουμε ότι, αν μία ακολουθία (x_n) στον X συγκλίνει στο x ως προς την $\|\cdot\|_1$ και στο x' ως προς την $\|\cdot\|_2$, τότε $x = x'$. Αποδείξτε ότι οι δύο νόρμες είναι ισοδύναμες.
Υπόδειξη. Θεώρημα κλειστού γραφήματος.
9. Έστω $\|\cdot\|$ οποιαδήποτε νόρμα στον $C([0, 1])$ με την οποία ο $C([0, 1])$ είναι πλήρης. Αν για κάθε (f_n) και f στον $C([0, 1])$ με $\|f_n - f\| \rightarrow 0$ συνεπάγεται ότι $f_n \rightarrow f$ κατά σημείο στο $[0, 1]$, αποδείξτε ότι η $\|\cdot\|$ είναι ισοδύναμη με την ομοιόμορφη νόρμα.
Υπόδειξη. Θεώρημα κλειστού γραφήματος.
10. Έστω χώροι Banach X, Y και $T \in L(X, Y)$. Αν ο $R(T)$ έχει πεπερασμένη συνδιάσταση, αποδείξτε ότι ο $R(T)$ είναι κλειστός.
Υπόδειξη. Υπάρχουν $y_1, \dots, y_n \in Y$ ώστε για κάθε $y \in Y$ να υπάρχουν μοναδικά $y' \in R(T)$

και $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in F$ ώστε $y = y' + \lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_n y_n$. Θεωρήστε τον τελεστή $S : X \oplus F^n \rightarrow Y$ με τύπο $S(x, \lambda_1, \dots, \lambda_n) = T(x) + \lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_n y_n$. Αποδείξτε βάσει του θεωρήματος ανοικτής απεικόνισης ότι υπάρχει $C \geq 0$ ώστε για κάθε $y \in R(T)$ να υπάρχει $x \in X$ ώστε $T(x) = y$ και $\|x\| \leq C\|y\|$.

11. Έστω χώρος Banach X και $\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ μία βάση Schauder του X . Για κάθε n θεωρούμε την $P_n : X \rightarrow X$ με τύπο $P_n(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ για κάθε $x = \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i x_i \in X$. Επίσης, για κάθε $x \in X$ ορίζουμε $\|x\|' = \sup_n \|P_n(x)\|$.
- (i) Αποδείξτε ότι η $\|\cdot\|'$ είναι νόρμα στον X .
- (ii) Αποδείξτε ότι ο X με την $\|\cdot\|'$ είναι πλήρης.
- (iii) Αποδείξτε ότι υπάρχει $C \geq 1$ ώστε να ισχύει $\|x\| \leq \|x\|' \leq C\|x\|$ για κάθε $x \in X$.
- (iv) Αποδείξτε ότι για κάθε συμπαγές $K \subseteq X$ ισχύει $\|P_n(x) - x\| \rightarrow 0$ ομοιόμορφα στο K .
12. Έστω χώροι Banach X, Y και $T \in L(X, Y)$. Αποδείξτε ότι ο $R(T)$ είναι κλειστός υπόχωρος του Y αν και μόνον αν υπάρχει $C > 0$ ώστε να ισχύει $\inf_{z \in N(T)} \|x - z\| \leq C\|T(x)\|$ για κάθε $x \in X$.
13. (i) Έστω χώρος Banach X και $T \in L(X)$. Αν για κάθε $x \in X$ η σειρά $x + \sum_{n=1}^{+\infty} T^n(x)$ συγκλίνει στον X , αποδείξτε ότι ο $I - T$ έχει φραγμένο αντίστροφο.
Υπόδειξη. Είναι προφανές το πώς θα ορισθεί ο $(I - T)^{-1}$. Ίσως χρειασθεί η αρχή ομοιόμορφου φράγματος.
- (ii) Έστω $K \in C([0, 1] \times [0, 1])$. Θεωρούμε την **εξίσωση Volterra**:

$$f(t) = g(t) + \int_0^t K(s, t)f(s) ds, \quad t \in [0, 1], \quad \text{όπου } g \in C([0, 1]).$$

Αποδείξτε ότι η εξίσωση έχει μοναδική λύση $f \in C([0, 1])$ για κάθε $g \in C([0, 1])$.
Υπόδειξη. Θέσατε $T(f)(t) = \int_0^t K(s, t)f(s) ds$ για κάθε $t \in [0, 1]$ και αποδείξτε επαγωγικά ότι $\|T^n(f)\|_u \leq \frac{\|K\|_u}{n!} \|f\|_u$.