Συναρτησιακή Ανάλυση, εαρινό εξάμηνο 2019-20.

Όγδοο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Θεωρήστε τους τελεστές $T_l, T_r : l^p \to l^p$, την αριστερή και την δεξιά μεταφορά.
(i) Αποδείξτε ότι και οι δύο τελεστές είναι φραγμένοι και ότι $\|T_l\| = \|T_r\| = 1$.
(ii) Αποδείξτε ότι οι δύο τελεστές δεν είναι συμπαγείς.

2. Έστω σ-πεπερασμένος χώρος μέτρου (Ω, Σ, μ), $m \in L^\infty(\Omega)$ και ο φραγμένος τελεστής $M_m^{(p)} : L^p(\Omega) \to L^p(\Omega)$ με τύπο $M_m^{(p)}(f) = mf$ για κάθε $f \in L^p(\Omega)$.
(i) Υποθέτουμε ότι $1 \leq p < +\infty$ και $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Αν $S : L^q(\Omega) \to (L^p(\Omega))'$ είναι η γνωστή γραμμική ισομετρία του $L^q(\Omega)$ επί του $(L^p(\Omega))'$, αποδείξτε ότι $(M_m^{(p)})' = SM_m^{(q)}S^{-1}$.
(ii) Υποθέτουμε ότι $p = 2$. Αποδείξτε ότι $(M_m^{(2)})^* = M_{\overline{m}}^{(2)}$.

3. Έστω χώροι με νόρμα X, Y και $T \in K(X, Y)$.
(i) Αποδείξτε ότι ο $\mathrm{R}(T)$ είναι διαχωρίσιμος.
(ii) Αν ο $\mathrm{R}(T)$ είναι πλήρης, αποδείξτε ότι $\dim(\mathrm{R}(T)) < +\infty$.
Υπόδειξη. Αν $B_{X,n} = \{x \in X \mid \|x\| \leq n\}$, αποδείξτε ότι $\mathrm{R}(T) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathrm{cl}(T(B_{X,n}))$.

4. Έστω χώροι Banach X_1, X_2 και χώρος με νόρμα Y. Αν $T_1 \in K(X_1, Y)$, $T_2 \in L(X_2, Y)$ και $\mathrm{R}(T_2) \subseteq \mathrm{R}(T_1)$, αποδείξτε ότι $T_2 \in K(X_2, Y)$.
Υπόδειξη. Αν ο T_1 είναι ένα-προς-ένα, αποδείξτε ότι ο $T_1^{-1}T_2 : X_2 \to X_1$ είναι κλειστός και άρα φραγμένος. Αν ο T_1 δεν είναι ένα-προς-ένα, θεωρήστε τον χώρο-πηλίκο $X_1/\,\mathrm{N}(T_1)$.

5. Έστω $1 < p < +\infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, και $\big(\sum_{j=1}^{+\infty}(\sum_{i=1}^{+\infty}|a_{ij}|^p)^{q/p}\big)^{1/q} = K < +\infty$. Αν για κάθε $x = (\lambda_i) \in l^p$ ορίσουμε
$$\kappa_j = \sum_{i=1}^{+\infty} a_{ji}\lambda_i,$$
αποδείξτε ότι $(\kappa_j) \in l^p$. Έτσι ορίζουμε τον τελεστή $T : l^p \to l^p$ με τύπο $T(x) = (\kappa_j)$ για κάθε $x = (\lambda_i) \in l^p$. Αποδείξτε ότι ο T είναι φραγμένος και συμπαγής, και ότι $\|T\| \leq K$.

6. Έστω χώρος με νόρμα X και χώρος Hilbert Y. Αν $T \in K(X, Y)$, αποδείξτε ότι υπάρχουν $T_n \in L(X, Y)$, με $\dim(\mathrm{R}(T_n)) < +\infty$ για κάθε n, ώστε $\|T_n - T\| \to 0$.
Υπόδειξη. Βάσει της άσκησης 3, ο $\mathrm{R}(T)$ είναι διαχωρίσιμος. Θεωρήστε μία ορθοκανονική βάση $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ του $\mathrm{R}(T)$, τους υπόχωρους $Y_n = \mathrm{span}(\{a_1, \dots, a_n\})$, τις ορθογώνιες προβολές P_n του Y επί των Y_n, και τους $T_n = P_nT$.

7. Έστω χώροι με νόρμα X, Y και $T \in L(X, Y)$. Αποδείξτε ότι, αν ο T είναι συμπαγής, τότε $x_n \xrightarrow{\mathrm{w}} x$ στον X συνεπάγεται $T(x_n) \to T(x)$ στον Y. Αν ο X είναι αυτοπαθής, αποδείξτε και το αντίστροφο.

8. Έστω χώρος Hilbert X και ορθοκανονική βάση $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ του X. Ένας τελεστής $T \in L(X)$ λέμε ότι είναι **Hilbert-Schmidt τελεστής** αν
$$\sum_{n,m=1}^{+\infty} |\langle T(a_n), a_m\rangle|^2 < +\infty$$
ή, ισοδύναμα, $\sum_{n=1}^{+\infty}\|T(a_n)\|^2 < +\infty$.
(i) Αποδείξτε ότι η παράσταση $\sum_{n,m=1}^{+\infty}|\langle T(a_n), a_m\rangle|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty}\|T(a_n)\|^2$ μένει ίδια αν αλλάξουμε την ορθοκανονική βάση.
(ii) Ορίζουμε την **Hilbert-Schmidt νόρμα** του T να είναι η
$$\|T\|_2 = \Big(\sum_{n,m=1}^{+\infty}|\langle T(a_n), a_m\rangle|^2\Big)^{1/2} = \Big(\sum_{n=1}^{+\infty}\|T(a_n)\|^2\Big)^{1/2}.$$

Αποδείξτε ότι $\|T\| \leq \|T\|_2$.
(iii) Αποδείξτε ότι, αν ο T είναι Hilbert-Schmidt, τότε είναι συμπαγής.
(iv) Αποδείξτε ότι το σύνολο $L_2(X)$ των Hilbert-Schmidt τελεστών στον X με την νόρμα $\|\cdot\|_2$ είναι χώρος Hilbert. Πώς ορίζεται το εσωτερικό γινόμενο στον χώρο $L_2(X)$;

9. Έστω σ-πεπερασμένος χώρος μέτρου (Ω, Σ, μ), έτσι ώστε ο $L^2(\Omega)$ να είναι διαχωρίσιμος, και άρα να έχει αριθμήσιμη ορθοκανονική βάση. Θεωρούμε συνάρτηση $K \in L^2(\Omega \times \Omega)$, δηλαδή ώστε
$$\int_\Omega \int_\Omega |K(x,y)|^2 \, d\mu(x) d\mu(y) < +\infty.$$
(i) Αποδείξτε ότι ο τελεστής $T_K : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ ο οποίος ορίζεται για κάθε $f \in L^2(\Omega)$ από τον τύπο
$$T_K(f)(y) = \int_\Omega K(x,y) f(x) \, d\mu(x) \quad \text{για σ.κ. } y \in \Omega$$
είναι Hilbert-Schmidt τελεστής με $\|T_K\|_2 = \|K\|_{L^2(\Omega\times\Omega)}$.
(ii) Αν $K_1, K_2 \in L^2(\Omega \times \Omega)$, αποδείξτε ότι υπάρχει $K \in L^2(\Omega \times \Omega)$ ώστε $T_K = T_{K_1} T_{K_2}$.
(iii) Έστω Hilbert-Schmidt τελεστής T στον $L^2(\Omega)$. Αποδείξτε ότι υπάρχει μοναδική συνάρτηση $K \in L^2(\Omega \times \Omega)$ ώστε $T = T_K$.