Συναρτησιακή Ανάλυση, εαρινό εξάμηνο 2019-20.

Ένατο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Έστω χώροι Banach X και Y.
(i) Αν U είναι το σύνολο όλων των φραγμένων ένα-προς-ένα τελεστών από τον X επί του Y, αποδείξτε ότι το U είναι ανοικτό υποσύνολο του $L(X,Y)$.
Υπόδειξη. Αν ο $T \in L(X,Y)$ είναι ένα-προς-ένα και επί του Y, τότε $T^{-1} \in L(Y,X)$. Αποδείξτε ότι αν $S \in L(X,Y)$ και $\|S-T\| < 1/\|T^{-1}\|$, τότε ο S είναι ένα προς ένα και επί του Y.
(ii) Αν W είναι το σύνολο όλων των φραγμένων τελεστών από τον X επί του Y, αποδείξτε ότι το W είναι ανοικτό υποσύνολο του $L(X,Y)$.
Υπόδειξη. Έστω $T \in L(X,Y)$ ώστε ο T να είναι επί του Y. Υπάρχει $C > 0$ ώστε για κάθε $y \in Y$ να υπάρχει $x \in X$ με $T(x) = y$ και $\|x\| \leq C\|y\|$. Έστω $S \in L(X,Y)$ με $\|S-T\| < \frac{1}{C}$, και έστω $r = C\|S-T\|$. Πάρτε $y \in Y$. Τότε υπάρχει $x_1 \in X$ με $T(x_1) = y$ και $\|x_1\| \leq C\|y\|$. Αποδείξτε επαγωγικά ότι υπάρχουν x_n ώστε για κάθε $n \geq 2$ να είναι $T(x_n) = (T-S)(x_{n-1})$ και $\|x_n\| \leq Cr^{n-1}\|y\|$. Αποδείξτε ότι το $x = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ υπάρχει στον X και $S(x) = y$.

2. Έστω οποιοδήποτε συμπαγές $K \subseteq F$. Αποδείξτε ότι υπάρχει κατάλληλο $m = (\mu_i) \in l^\infty$ ώστε για τον πολλαπλασιαστικό τελεστή $M_m : l^2 \to l^2$ να ισχύει $\sigma(M_m) = K$.
Υπόδειξη. Υπάρχει αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του K.

3. Έστω χώρος Banach X και $S, T \in L(X)$.
(i) Αν $\lambda \in F \setminus \{0\}$, αποδείξτε ότι $\lambda \in \sigma(ST)$ αν και μόνο αν $\lambda \in \sigma(TS)$.
Υπόδειξη. Αν $\lambda \neq 0$ και $(\lambda I - ST)^{-1} \in L(X)$, αποδείξτε ότι $(\lambda I - TS)^{-1} = \lambda^{-1} + \lambda^{-1}T(\lambda I - ST)^{-1}S$.
(ii) Θεωρήστε τους τελεστές μετάθεσης $T_r, T_l \in L(l^2)$ και διερευνήστε την ύπαρξη του 0 στο $\sigma(T_rT_l)$ και στο $\sigma(T_lT_r)$.

4. (i) Έστω χώρος Banach X επί του $\mathbb{C}$ και $T \in L(X)$. Αν το $p(\lambda) = a_n\lambda^n + \cdots + a_1\lambda + a_0$ είναι πολυώνυμο, ορίζουμε
$$p(T) = a_nT^n + \cdots + a_1T + a_0I.$$
Αποδείξτε ότι $\sigma(p(T)) = p(\sigma(T))$.
Υπόδειξη. Κάθε μιγαδικό πολυώνυμο $q(\lambda)$ γράφεται: $q(\lambda) = a(\lambda - \lambda_1)\cdots(\lambda - \lambda_n)$. Αποδείξτε ότι $0 \in \sigma(q(T))$ αν και μόνο αν $0 \in q(\sigma(T))$.
(ii) Ισχύει το προηγούμενο αν $X = \mathbb{R}^2$, $p(\lambda) = \lambda^2 + 1$ και ο T είναι η στροφή κατά $\pi/2$;

5. Έστω χώρος Banach X επί του $\mathbb{C}$ και $S, T \in L(X)$ με $ST = TS$. Αποδείξτε ότι $r_\sigma(S+T) \leq r_\sigma(S) + r_\sigma(T)$ και $r_\sigma(ST) \leq r_\sigma(S)r_\sigma(T)$.

6. Έστω χώρος Banach X και $T \in L(X)$.
(i) Αν το ανοικτό $U \subseteq F$ περιέχει το $\sigma(T)$, αποδείξτε ότι υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε $\sigma(S) \subseteq U$ για κάθε $S \in L(X)$ με $\|S - T\| < \epsilon$.
Υπόδειξη. Η $R(\lambda, T)$ είναι φραγμένη στο $F \setminus U$ και $\lambda I - S = (\lambda I - T)(I + R(\lambda, T)(T - S))$.
(ii) Αν $T_n \to T$ στον $L(X)$, αποδείξτε ότι $\limsup_{n\to+\infty} r_\sigma(T_n) \leq r_\sigma(T)$.

7. Έστω χώρος Banach X και $T \in L(X)$. Αν $T' \in L(X')$ είναι ο δυικός τελεστής του T, αποδείξτε ότι:
(i) $\sigma(T') = \sigma(T)$.
(ii) $R_\sigma(T) \subseteq P_\sigma(T')$ και $P_\sigma(T) \subseteq P_\sigma(T') \cup R_\sigma(T')$.

8. Έστω χώρος Banach X και $T \in L(X)$. Αποδείξτε ότι, αν το λ είναι συνοριακό σημείο του $\sigma(T)$, τότε $\mathrm{R}(\lambda I - T) \neq X$.

9. Έστω χώρος Hilbert X και $T \in L(X)$. Αποδείξτε ότι $\sigma(T^*) = \overline{\sigma(T)} = \{\overline{\lambda} \mid \lambda \in \sigma(T)\}$.

10. Έστω χώρος Hilbert X επί του $\mathbb{C}$ και $T \in L(X)$. Αν $\langle T(x), x\rangle = 0$ για κάθε $x \in X$, αποδείξτε ότι $T = 0$. Βρείτε αντιπαράδειγμα στην περίπτωση $F = \mathbb{R}$.

11. Έστω χώρος Hilbert X και αυτοσυζυγής $T \in L(X)$. Ο T ονομάζεται **μη-αρνητικός** (ή *μη-αρνητικά ορισμένος*) αν $\langle T(x), x\rangle \geq 0$ για κάθε $x \in X$, και ο T ονομάζεται **θετικός** (ή *θετικά ορισμένος*) αν $\langle T(x), x\rangle > 0$ για κάθε $x \in X$, $x \neq 0$.
(i) Αν ο T είναι μη-αρνητικός, αποδείξτε ότι $|\langle T(x), y\rangle|^2 \leq \langle T(x), x\rangle\langle T(y), y\rangle$ για κάθε $x, y \in X$.
(ii) Αποδείξτε ότι για κάθε $T \in L(X)$ ο T^*T και ο TT^* είναι μη-αρνητικά ορισμένοι.

12. Έστω $K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$K(x,y) = \begin{cases} 1, & x + y \geq 1 \\ 0, & x + y < 1 \end{cases}$$

και ο ολοκληρωτικός τελεστής $T : L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$ με τύπο

$$T(f)(y) = \int_0^1 K(x,y) f(x)\, dx \qquad \text{για σ.κ. } y \in [0,1].$$

Βρείτε το φάσμα του T καθώς και τους ιδιόχωρους του T.

13. Έστω (Ω, Σ, μ) ένας σ-πεπερασμένος χώρος μέτρου και $m \in L^\infty(\Omega)$. Θεωρούμε τον πολλαπλασιαστικό τελεστή $M_m : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ με τύπο

$$M_m(f) = mf \quad \text{για κάθε } f \in L^2(\Omega).$$

(i) Αποδείξτε ότι το λ είναι ιδιοτιμή του M_m αν και μόνο αν $\mu(\{x \in \Omega \mid m(x) = \lambda\}) > 0$.
(ii) Αν $\mu(\Omega) < +\infty$, αποδείξτε ότι ο M_m είναι συμπαγής αν και μόνο αν για κάθε $\epsilon > 0$ το σύνολο $\{x \in \Omega \mid |m(x)| > \epsilon\}$ είναι πεπερασμένο και ο περιορισμός του μ στο σύνολο $\{x \in \Omega \mid m(x) \neq 0\}$ είναι της μορφής $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n \delta_{x_n}$, όπου $c_n \geq 0$ (και δ_{x_n} είναι οι συνήθεις μάζες Dirac στα σημεία x_n).

14. Έστω χώρος Hilbert X και $T \in L(X)$.
(i) Αποδείξτε ότι ο T είναι κανονικός αν και μόνο αν $\|T(x)\| = \|T^*(x)\|$ για κάθε $x \in X$.
(ii) Αν ο T είναι κανονικός, αποδείξτε ότι $\|T^n\| = \|T\|^n$ για κάθε $n \geq 1$.
Υπόδειξη. Αποδείξτε το πρώτα για $n = 2$, και μετά για $n = 2^k$.

15. Έστω χώρος Hilbert X και $T \in L(X)$. Ο T ονομάζεται **μοναδιαίος** αν $T^*T = TT^* = I$. Αν ο T είναι επί του X, αποδείξτε ότι ο T είναι μοναδιαίος αν και μόνο αν $\|T(x)\| = \|x\|$ για κάθε $x \in X$ αν και μόνο αν $\langle T(x), T(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ για κάθε $x, y \in X$.

16. Έστω χώρος Hilbert X επί του $\mathbb{C}$ και $T \in K(X)$.
(i) Αποδείξτε ότι ο T είναι κανονικός αν και μόνο αν υπάρχει ορθοκανονική βάση του X η οποία αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του T.
(ii) Αποδείξτε ότι ο T είναι αυτοσυζυγής αν και μόνο αν ο T είναι κανονικός και όλες οι ιδιοτιμές του είναι πραγματικές.