Συναρτησιακή Ανάλυση, εαρινό εξάμηνο 2020-21.

Δεύτερο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Έστω χώρος X με εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$ και επαγώμενη νόρμα $\| \cdot \|$.
Αν $\|x_n\| \leq 1$, $\|y_n\| \leq 1$ και $\langle x_n, y_n \rangle \to 1$, αποδείξτε ότι $\|x_n - y_n\| \to 0$.
Αν $\|x_n\| \to \|x\|$ και $\langle x_n, y \rangle \to \langle x, y \rangle$ για κάθε $y \in X$, αποδείξτε ότι $\|x_n - x\| \to 0$.

2. Έστω χώρος X με νόρμα $\| \cdot \|$ και έστω ότι ισχύει η ταυτότητα του παραλληλογράμμου:
$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$
για κάθε $x, y \in X$.
Αν $F = \mathbb{R}$ και ορίσουμε
$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} \|x + y\|^2 - \frac{1}{4} \|x - y\|^2$$
για κάθε $x, y \in X$, αποδείξτε ότι το $\langle \cdot, \cdot \rangle$ είναι εσωτερικό γινόμενο στον X και ότι επάγει την $\| \cdot \|$.
Αν $F = \mathbb{C}$, αποδείξτε το ίδιο πράγμα με το
$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} \|x + y\|^2 - \frac{1}{4} \|x - y\|^2 + \frac{i}{4} \|x + iy\|^2 - \frac{i}{4} \|x - iy\|^2$$
για κάθε $x, y \in X$.

3. Έστω χώρος X με εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$ και επαγώμενη νόρμα $\| \cdot \|$, και έστω $x, y \in X$. Αποδείξτε ότι $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ αν και μόνο αν ένα από τα x, y είναι πολλαπλάσιο του άλλου με μη-αρνητικό αριθμό.
Υπόδειξη. Από την $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ αποδείξτε την $\langle x, y \rangle = \|x\|\|y\|$ και μετά χρησιμοποιήστε την γνωστή ταυτότητα για το $\|\kappa x + \lambda y\|^2$.

4. Αποδείξτε ότι, αν $1 \leq p \leq +\infty$ και $p \neq 2$, τότε ο l^p με την p-νόρμα δεν είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο.
Υπόδειξη. Αποδείξτε ότι η p-νόρμα δεν ικανοποιεί τον κανόνα του παραλληλογράμμου.
Αποδείξτε το ίδιο για τον $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ με την p-νόρμα, εκτός από ελάχιστες εξαιρέσεις τις οποίες πρέπει να προσδιορίσετε.

5. Έστω X ένας γραμμικός χώρος επί του F ο οποίος είναι απειροδιάστατος, και έστω B μία βάση του X. Ορίζουμε $\| \cdot \|_1 : X \to \mathbb{R}$ και $\| \cdot \|_\infty : X \to \mathbb{R}$ με τύπους:
$$\|x\|_1 = |\lambda_1| + \cdots + |\lambda_n|, \quad \|x\|_\infty = \max\{|\lambda_1|, \ldots, |\lambda_n|\}$$
για κάθε $x \in X$, όπου $x = \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_n b_n$, με $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in F$ και $b_1, \ldots, b_n \in B$, είναι η μοναδική αναπαράσταση του x ως γραμμικός συνδυασμός στοιχείων της βάσης B.
Αποδείξτε ότι οι $\| \cdot \|_1$, $\| \cdot \|_\infty$ είναι νόρμες στον X και ότι δεν είναι ισοδύναμες.

6. Θεωρούμε τον l^1 και ορίζουμε $\| \cdot \|' : l^1 \to \mathbb{R}$ με τύπο:
$$\|x\|' = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{2^j} |\lambda_j|$$
για κάθε $x = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots) \in l^1$.
Αποδείξτε ότι η $\| \cdot \|'$ είναι νόρμα στον l^1 και ότι δεν είναι ισοδύναμη με την 1-νόρμα.
Αποδείξτε ότι ο l^1 με την $\| \cdot \|'$ δεν είναι πλήρης.

7. Θεωρήστε τον l^1 με την 1-νόρμα. Για $j \in \mathbb{N}$, συμβολίζουμε

$$e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$$

την ακολουθία με όλες τις συντεταγμένες ίσες με 0 εκτός από την j-οστή συντεταγμένη που είναι ίση με 1. Προφανώς, κάθε e_j είναι στοιχείο του l^1.

Αποδείξτε ότι το σύνολο $\{e_j \,|\, j \in \mathbb{N}\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο, αλλά δεν παράγει τον l^1. Αποδείξτε ότι $\mathrm{sp}(\{e_j \,|\, j \in \mathbb{N}\}) = c_{00}$. (Γενικά, σε γραμμικό χώρο X, με $\mathrm{sp}(A)$ συμβολίζουμε τον γραμμικό υπόχωρο ο οποίος παράγεται από το σύνολο $A \subseteq X$.)

Αποδείξτε ότι στον c_{00} (ως υπόχωρο του l^1) η σειρά $\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^2}\, e_j$ συγκλίνει απολύτως αλλά δεν συγκλίνει.

8. Έστω χώρος Banach X και $b_1, b_2, \ldots \in X$. Λέμε ότι το $\{b_1, b_2, \ldots\}$ είναι **βάση Schauder** του X αν για κάθε $x \in X$ υπάρχουν μοναδικά $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \in F$ ώστε $x = \sum_{j=1}^{+\infty} \lambda_j b_j$.

Αποδείξτε ότι το $\{e_j \,|\, j \in \mathbb{N}\}$ (δείτε την άσκηση 7 για τον ορισμό των e_j) είναι βάση Schauder καθενός από τους l^p, $1 \leq p < +\infty$.

Υπάρχει βάση Schauder για τον l^∞;

9. (i) Έστω χώρος X πεπερασμένης διάστασης με νόρμα $\|\cdot\|$, και γραμμικός υπόχωρος $Y \neq X$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $x \in X$ ώστε $\|x\| = 1$ και $\inf\{\|x - y\| \,|\, y \in Y\} = 1$.

(ii) Στον $C([0,1])$ με την ομοιόμορφη νόρμα $\|\cdot\|_u$ θεωρούμε τους υποχώρους

$$X = \{f \in C([0,1]) \,|\, f(0) = 0\}, \qquad Y = \Big\{f \in C([0,1]) \,\Big|\, f(0) = 0,\ \int_0^1 f(x)\, dx = 0\Big\}.$$

Αποδείξτε ότι ο X είναι κλειστός υπόχωρος του $C([0,1])$, και άρα χώρος Banach.

Αποδείξτε ότι ο Y είναι κλειστός γνήσιος υπόχωρος του X.

Αποδείξτε ότι για κάθε $f \in X$ με $\|f\|_u = 1$ ισχύει $\inf\{\|f - g\|_u \,|\, g \in Y\} < 1$.

10. Στον $C([0,1])$ με την ομοιόμορφη νόρμα θεωρούμε το σύνολο

$$K = \Big\{g \in C([0,1]) \,\Big|\, g(0) = 1,\ \int_0^1 g(x)\, dx = 0\Big\}.$$

Αποδείξτε ότι το K είναι κλειστό και κυρτό υποσύνολο του $C([0,1])$.

Αποδείξτε ότι $\inf_{g \in K} \|1 - g\|_u = 1$ και ότι δεν υπάρχει καμία $g \in K$ ώστε $\|1 - g\|_u = 1$.

11. Θεωρούμε τον υπόχωρο c_{00} του l^2 και το υποσύνολό του

$$K = \Big\{(\lambda_j) \in c_{00} \,\Big|\, \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j}\, \lambda_j = 1\Big\}.$$

Αποδείξτε ότι το K είναι κλειστό και κυρτό.

Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει $y_0 \in K$ ώστε $\|y_0\|_2 = \inf_{y \in K} \|y\|_2$.

12. Στον χώρο l^2 θεωρούμε τους κλειστούς υποχώρους

$$M = \mathrm{clsp}(\{e_{2j} \,|\, j \in \mathbb{N}\}), \quad Y = \mathrm{clsp}(\{e_{2j} + (1/j)e_{2j-1} \,|\, j \in \mathbb{N}\}).$$

(Δείτε την άσκηση 7 για τον ορισμό των e_j. Επίσης, σε χώρο με νόρμα X, με $\mathrm{clsp}(A)$ συμβολίζουμε τον κλειστό γραμμικό υπόχωρο ο οποίος παράγεται από το σύνολο $A \subseteq X$, δηλαδή το $\mathrm{cl}(\mathrm{sp}(A))$.)

Αποδείξτε ότι ο υπόχωρος $M+Y$ είναι πυκνός στον l^2 και ότι $(1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, 0, \ldots) \notin M+Y$. Άρα ο $M + Y$ δεν είναι κλειστός.

13. (i) Έστω $0 < t \leq 1$ και $\kappa, \lambda \in \mathbb{C}$. Αν $1 < p \leq 2$, αποδείξτε ότι

$$\big((1+t)^{p-1} + (1-t)^{p-1}\big)|\kappa|^p + \Big(\Big(\frac{1}{t}+1\Big)^{p-1} - \Big(\frac{1}{t}-1\Big)^{p-1}\Big)|\lambda|^p \leq |\kappa+\lambda|^p + |\kappa-\lambda|^p.$$

Αν $2 \leq p < +\infty$, αποδείξτε ότι η προηγούμενη ανισότητα ισχύει με $\geq$ αντί $\leq$.
Αν, επιπλέον, $0 < \lambda \leq \kappa$ και $t = \frac{\lambda}{\kappa}$, αποδείξτε ότι η προηγούμενη ανισότητα ισχύει ως ισότητα για κάθε p με $1 < p < +\infty$.

(ii) **Ανισότητες Hanner**. Αν $1 < p \leq 2$, αποδείξτε ότι

$$\|x+y\|_p^p + \|x-y\|_p^p \geq \big|\,\|x\|_p + \|y\|_p\big|^p + \big|\,\|x\|_p - \|y\|_p\big|^p$$

για κάθε x, y στον l^p ή σε χώρο πεπερασμένης διάστασης και

$$\|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p \geq \big|\,\|f\|_p + \|g\|_p\big|^p + \big|\,\|f\|_p - \|g\|_p\big|^p$$

για κάθε $f, g \in L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$.
Αν $2 \leq p < +\infty$, αποδείξτε ότι ισχύουν οι ίδιες ανισότητες με $\leq$ αντί $\geq$.

14. (i) Έστω χώρος X με νόρμα $\|\cdot\|$ η οποία είναι **ομοιόμορφα κυρτή**: για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $x, y \in X$ ισχύει:

$$\|x\| = \|y\| = 1,\ \Big\|\frac{x+2}{2}\Big\| > 1-\delta \quad \Rightarrow \quad \|x-y\| < \epsilon.$$

Έστω κυρτό και πλήρες $K \subseteq X$, και $x_0 \in X$. Αποδείξτε ότι υπάρχει μοναδικό $y_0 \in K$ ώστε $\|x_0 - y_0\| = \inf\{\|x_0 - y\| \,|\, y \in K\}$.

(ii) Αν $1 < p < +\infty$, αποδείξτε βάσει της άσκησης 13 ότι η p-νόρμα στον $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$, στον l^p και σε κάθε χώρο πεπερασμένης διάστασης είναι ομοιόμορφα κυρτή.

(iii) Αποδείξτε ότι η νόρμα οποιουδήποτε χώρου με εσωτερικό γινόμενο είναι ομοιόμορφα κυρτή.

15. Μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to F$ ονομάζεται **συνάρτηση φραγμένης κύμανσης** στο $\mathbb{R}$ αν υπάρχει $M \geq 0$ ώστε να ισχύει

$$\sum_{j=1}^{n-1} |f(t_{j+1}) - f(t_j)| \leq M$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$ με $t_1 < \dots < t_n$.
Θεωρούμε το σύνολο $BV(\mathbb{R})$ με στοιχεία όλες τις συναρτήσεις φραγμένης κύμανσης στο $\mathbb{R}$, και για κάθε $f \in BV(\mathbb{R})$ ορίζουμε

$$\|f\|_{BV} = |f(0)| + \sup\Big\{\sum_{j=1}^{n-1} |f(t_{j+1}) - f(t_j)| \,\Big|\, n \in \mathbb{N}, t_1 < \dots < t_n\Big\}.$$

Αποδείξτε ότι ο $BV(\mathbb{R})$ είναι γραμμικός χώρος επί του F, ότι η $\|\cdot\|_{BV}$ είναι νόρμα στον $BV(\mathbb{R})$ και ότι ο $BV(\mathbb{R})$ είναι χώρος Banach.

16. (i) Έστω $0 < \alpha \leq 1$. Μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to F$ ονομάζεται **συνάρτηση Lipschitz τάξης** α στο $\mathbb{R}$ αν υπάρχει $M \geq 0$ ώστε να ισχύει

$$|f(t) - f(s)| \leq M\delta^\alpha$$

για κάθε $\delta > 0$ και $t, s \in \mathbb{R}$ με $|t-s| \leq \delta$.
Θεωρούμε το σύνολο $Lip_\alpha(\mathbb{R})$ με στοιχεία όλες τις συναρτήσεις Lipschitz τάξης α στο $\mathbb{R}$, και για κάθε $f \in Lip_\alpha(\mathbb{R})$ ορίζουμε

$$\omega_\delta(f) = \sup\{|f(t) - f(s)| \,|\, |t-s| \leq \delta\}, \quad \|f\|_{Lip_\alpha} = |f(0)| + \sup_{\delta>0} \frac{\omega_\delta(f)}{\delta^\alpha}.$$

Αποδείξτε ότι ο $Lip_\alpha(\mathbb{R})$ είναι γραμμικός χώρος επί του F, ότι η $\|\cdot\|_{Lip_\alpha}$ είναι νόρμα στον $Lip_\alpha(\mathbb{R})$ και ότι ο $Lip_\alpha(\mathbb{R})$ είναι χώρος Banach.

(ii) Θεωρούμε το σύνολο $lip_\alpha(\mathbb{R})$ με στοιχεία όλες τις συναρτήσεις $f \in Lip_\alpha(\mathbb{R})$ με την ιδιότητα

$$\lim_{\delta \to 0+} \frac{\omega_\delta(f)}{\delta^\alpha} = 0.$$

Αποδείξτε ότι ο $lip_\alpha(\mathbb{R})$ είναι κλειστός υπόχωρος του $Lip_\alpha(\mathbb{R})$.

(iii) Αποδείξτε ότι τα στοιχεία του $Lip_1(\mathbb{R})$ είναι οι απολύτως συνεχείς συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$ των οποίων η παράγωγος ανήκει στον $L^\infty(\mathbb{R})$. Αποδείξτε ότι τα στοιχεία του $lip_1(\mathbb{R})$ είναι οι σταθερές συναρτήσεις.

17. (i) Έστω $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 1\}$ ο ανοικτός μοναδιαίος δίσκος στο $\mathbb{C}$. Για $1 \leq p < +\infty$ θεωρούμε το σύνολο $H^p(\mathbb{D})$ με στοιχεία όλες τις συναρτήσεις $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ οι οποίες είναι ολόμορφες στο $\mathbb{D}$ και με την ιδιότητα

$$\sup_{0 \leq r < 1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \, d\theta < +\infty.$$

Για κάθε $f \in H^p(\mathbb{D})$ ορίζουμε

$$\|f\|_p = \sup_{0 \leq r < 1} \Big(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \, d\theta \Big)^{1/p}.$$

Αποδείξτε ότι το $H^p(\mathbb{D})$ είναι γραμμικός χώρος επί του $\mathbb{C}$, ότι η $\|\cdot\|_p$ είναι νόρμα στον $H^p(\mathbb{D})$ και ότι ο $H^p(\mathbb{D})$ είναι χώρος Banach.

(ii) Θεωρούμε το σύνολο $H^\infty(\mathbb{D})$ με στοιχεία όλες τις συναρτήσεις $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ οι οποίες είναι ολόμορφες και φραγμένες στο $\mathbb{D}$. Για κάθε $f \in H^\infty(\mathbb{D})$ ορίζουμε

$$\|f\|_\infty = \sup_{z \in \mathbb{D}} |f(z)|.$$

Αποδείξτε ότι ο $H^\infty(\mathbb{D})$ είναι γραμμικός χώρος επί του $\mathbb{C}$, ότι η $\|\cdot\|_\infty$ είναι νόρμα στον $H^\infty(\mathbb{D})$ και ότι ο $H^\infty(\mathbb{D})$ είναι χώρος Banach.

(iii) Θεωρούμε το σύνολο $A(\mathbb{D})$ με στοιχεία όλες τις συναρτήσεις $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ οι οποίες είναι συνεχείς στο $\mathrm{cl}(\mathbb{D}) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| \leq 1\}$ και ολόμορφες στο $\mathbb{D}$. Για κάθε $f \in A(\mathbb{D})$ ορίζουμε

$$\|f\|_\infty = \max_{|z| \leq 1} |f(z)|.$$

Αποδείξτε ότι ο $A(\mathbb{D})$ είναι γραμμικός χώρος επί του $\mathbb{C}$, ότι η $\|\cdot\|_\infty$ είναι νόρμα στον $A(\mathbb{D})$ και ότι ο $A(\mathbb{D})$ είναι χώρος Banach.