

Συναρτησιακή Ανάλυση, εαρινό εξάμηνο 2020-21.

Τρίτο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Θεωρήστε το στοιχείο $z = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} e_k = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots)$ του l^2 . Αποδείξτε ότι στον υπόχωρο $Y = \text{sr}(\{z, e_2, e_3, \dots\})$ του l^2 το $\{e_2, e_3, \dots\}$ είναι μεγιστικό ορθοκανονικό σύνολο αλλά όχι ορθοκανονική βάση. Είναι ο Y κλειστός υπόχωρος του l^2 ;
2. Έστω ότι για κάθε $i \in I$ ο X_i είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle_i$ και νόρμα $\| \cdot \|_i$. Θεωρήστε $\bigoplus_{i \in I} X_i$ να είναι το σύνολο όλων των $x = (x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i$ με την ιδιότητα:

$$\sum_{i \in I} \|x_i\|_i^2 < +\infty.$$

Επίσης, για $x = (x_i)_{i \in I}, y = (y_i)_{i \in I}$ στο $\bigoplus_{i \in I} X_i$ ορίσατε

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i \in I} \langle x_i, y_i \rangle_i.$$

(i) Αποδείξτε ότι το $\bigoplus_{i \in I} X_i$ είναι γραμμικός χώρος, ότι η σειρά η οποία ορίζει το $\langle x, y \rangle$ συγκλίνει (στο F) και ότι το $\langle \cdot, \cdot \rangle$ είναι εσωτερικό γινόμενο στον $\bigoplus_{i \in I} X_i$. Ο χώρος $\bigoplus_{i \in I} X_i$ με το συγκεκριμένο εσωτερικό γινόμενο ονομάζεται **ευθύ άθροισμα** των χώρων με εσωτερικό γινόμενο $X_i, i \in I$. Αποδείξτε ότι, αν κάθε X_i είναι πλήρης, τότε και ο $\bigoplus_{i \in I} X_i$ είναι πλήρης.

(ii) Έστω $X_i = F$ για κάθε $i \in I$. Θεωρήστε τον $l^2(I) = \bigoplus_{i \in I} F$. Δηλαδή, για κάθε $x = (\kappa_i)_{i \in I}, y = (\lambda_i)_{i \in I} \in \bigoplus_{i \in I} F$ έχουμε

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i \in I} \kappa_i \bar{\lambda}_i, \quad \|x\|^2 = \sum_{i \in I} |\kappa_i|^2.$$

Αποδείξτε ότι ο $l^2(I)$ είναι χώρος Hilbert.

(iii) Έστω χώρος Hilbert X με ορθοκανονική βάση $\{e_i \mid i \in I\}$. Αποδείξτε ότι ο X είναι γραμμικά ισομετρικός με τον $l^2(I)$.

3. (i) Αποδείξτε ότι κάθε δύο μεγιστικά ορθοκανονικά σύνολα ενός χώρου με εσωτερικό γινόμενο έχουν τον ίδιο πληθάρημο. Αν X είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο και A είναι οποιοδήποτε μεγιστικό ορθοκανονικό σύνολο του X , ο πληθάρημος $\text{card}(A)$ ονομάζεται **διάσταση Hilbert** του X .

Υπόδειξη. Έστω A_1, A_2 δύο μεγιστικά ορθοκανονικά σύνολα ενός χώρου με εσωτερικό γινόμενο. Αποδείξτε ότι για κάθε $x \in A_1$ το $M_x = \{y \in A_2 \mid \langle x, y \rangle \neq 0\}$ είναι αριθμήσιμο, και ότι για κάθε $y \in A_2$ υπάρχει τουλάχιστον ένα $x \in A_1$ ώστε $y \in M_x$, δηλαδή $A_2 = \bigcup_{x \in A_1} M_x$.

(ii) Έστω χώροι Hilbert X, Y . Αποδείξτε ότι οι X, Y είναι γραμμικά ισομετρικοί αν και μόνο αν έχουν την ίδια διάσταση Hilbert.

4. Έστω χώρος X με εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Για οποιαδήποτε $x_1, \dots, x_n \in X$ θεωρήστε τον $n \times n$ **πίνακα Gram** $[\langle x_i, x_j \rangle]$ και την **ορίζουσα Gram**

$$G(x_1, \dots, x_n) = \det [\langle x_i, x_j \rangle].$$

(i) Θεωρήστε γνωστό από την Γραμμική Άλγεβρα ότι κάθε $n \times n$ πραγματικός πίνακας $[a_{ij}]$ με $[a_{ji}] = [a_{ij}]$ είναι διαγωνιοποιήσιμος, καθώς και ότι κάθε $n \times n$ μιγαδικός πίνακας $[a_{ij}]$ με $[a_{ji}] = \overline{[a_{ij}]}$ είναι διαγωνιοποιήσιμος.

Αποδείξτε ότι $G(x_1, \dots, x_n) \geq 0$, καθώς και ότι $G(x_1, \dots, x_n) = 0$ αν και μόνο αν το $\{x_1, \dots, x_n\}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένο.

(ii) Αν $x \in X$, $M = \text{sp}(\{x_1, \dots, x_n\})$ και το $\{x_1, \dots, x_n\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο, αποδείξτε ότι

$$\min_{y \in M} \|x - y\|^2 = \frac{G(x, x_1, \dots, x_n)}{G(x_1, \dots, x_n)}.$$

Αποδείξτε με δεύτερο τρόπο το (i) χρησιμοποιώντας επαγωγή.

(iii) Αν το $\{x_1, \dots, x_n\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο υποσύνολο του \mathbb{R}^n , αποδείξτε ότι ο όγκος του παραλληλεπίπεδου $P = \{t_1 x_1 + \dots + t_n x_n \mid 0 \leq t_1 \leq 1, \dots, 0 \leq t_n \leq 1\}$ είναι ίσος με $\sqrt{G(x_1, \dots, x_n)}$.

5. Θεωρήστε τον χώρο $H^2(\mathbb{D})$ ο οποίος ορίστηκε στην άσκηση 17 του δεύτερου φυλλαδίου. Είναι γνωστό από την Μιγαδική Ανάλυση ότι κάθε $f \in H^2(\mathbb{D})$ (και, γενικότερα, κάθε f ολόμορφη στο \mathbb{D}) γράφεται $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ για κάθε $z \in \mathbb{D}$, όπου η δυναμοσειρά αυτή συγκλίνει ομοιόμορφα στην f σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του \mathbb{D} .

(i) Αποδείξτε ότι για κάθε $r \in [0, 1)$ ισχύει

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n}.$$

(ii) Αποδείξτε ότι το $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta$ είναι αύξουσα συνάρτηση του r στο $[0, 1)$ και ότι

$$\|f\|_2 = \lim_{r \rightarrow 1^-} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta \right)^{1/2}.$$

(iii) Αν η f είναι ολόμορφη στο \mathbb{D} και $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ για κάθε $z \in \mathbb{D}$, αποδείξτε ότι $f \in H^2(\mathbb{D})$ αν και μόνον αν $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 < +\infty$ και ότι, σ' αυτήν την περίπτωση,

$$\|f\|_2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2.$$

(iv) Αποδείξτε ότι για κάθε $f, g \in H^2(\mathbb{D})$ με $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ και $g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ για κάθε $z \in \mathbb{D}$, η σειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \overline{b_n}$ συγκλίνει και ότι, αν ορίσουμε

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \overline{b_n},$$

τότε το $\langle \cdot, \cdot \rangle$ είναι εσωτερικό γινόμενο στον $H^2(\mathbb{D})$ το οποίο επάγει τη νόρμα $\|\cdot\|_2$.

6. Έστω χώρος X με εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$ και νόρμα $\|\cdot\|$, και έστω αριθμήσιμη ορθοκανονική βάση $\{e_1, e_2, \dots\}$ του X . Επίσης, έστω χώρος μέτρου (Ω, Σ, μ) .

Αν $f : \Omega \rightarrow X$, λέμε ότι η f είναι **μετρήσιμη** (ως συνάρτηση με τιμές σε χώρο με εσωτερικό γινόμενο) αν για κάθε $x \in X$ η συνάρτηση

$$\langle f(\cdot), x \rangle : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

είναι μετρήσιμη.

(i) Χρησιμοποιώντας τις ταυτότητες Parseval, αποδείξτε ότι, αν οι $f, g : \Omega \rightarrow X$ είναι μετρήσιμες, τότε οι συναρτήσεις

$$\|f(\cdot)\| : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad \langle f(\cdot), g(\cdot) \rangle : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

είναι μετρήσιμες.

(ii) Θεωρήστε τον χώρο $L^2(\Omega, \Sigma, \mu; X)$ ως το σύνολο όλων των μετρήσιμων $f : \Omega \rightarrow X$ με

$$\int_{\Omega} \|f(a)\|^2 d\mu(a) < +\infty.$$

Αποδείξτε ότι ο $L^2(\Omega, \Sigma, \mu; X)$ είναι γραμμικός χώρος.

(iii) Αποδείξτε ότι για κάθε $f, g \in L^2(\Omega, \Sigma, \mu; X)$ το

$$\langle f, g \rangle_2 = \int_{\Omega} \langle f(a), g(a) \rangle d\mu(a)$$

συγκλίνει και ότι το $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ είναι εσωτερικό γινόμενο στον $L^2(\Omega, \Sigma, \mu; X)$.

(iv) Για κάθε $f, g \in L^2(\Omega, \Sigma, \mu; X)$ αποδείξτε ότι

$$\langle f, g \rangle_2 = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{\Omega} \langle f(a), e_k \rangle \overline{\langle g(a), e_k \rangle} d\mu(a).$$

7. Έστω μ_1 και μ_2 δύο μέτρα στον ίδιο μετρήσιμο χώρο (Ω, Σ) , τα οποία είναι αμοιβαία ιδιάζοντα: $\mu_1 \perp \mu_2$. Αποδείξτε ότι

$$L^2(\Omega, \Sigma, \mu_1 + \mu_2) \stackrel{iso}{=} L^2(\Omega, \Sigma, \mu_1) \oplus L^2(\Omega, \Sigma, \mu_2),$$

δηλαδή ότι οι $L^2(\Omega, \Sigma, \mu_1 + \mu_2)$, $L^2(\Omega, \Sigma, \mu_1) \oplus L^2(\Omega, \Sigma, \mu_2)$ είναι ισομετρικοί.

Δείτε την άσκηση 2 για τον ορισμό του $X_1 \oplus X_2$.

8. Θεωρήστε γνωστό το εξής πόρισμα του θεωρήματος των Stone και Weierstrass: το σύνολο των εκθετικών πολυωνύμων $\sum_{k=-n}^n a_k e^{2\pi i k t}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, είναι πυκνό στον $C([0, 1])$ με την ομοιόμορφη νόρμα.

Επίσης, θεωρήστε γνωστό το ότι το $C([0, 1])$ είναι πυκνό υποσύνολο του $L^2([0, 1])$.

Αποδείξτε ότι το σύνολο των συναρτήσεων

$$e_n(t) = e^{2\pi i n t}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

αποτελεί ορθοκανονική βάση του $L^2([0, 1])$.

9. Θεωρήστε γνωστό το θεώρημα του Weierstrass: για κάθε κλειστό φραγμένο διάστημα $[a, b]$ το σύνολο των πολυωνύμων είναι πυκνό στον $C([a, b])$ με την ομοιόμορφη νόρμα.

Επίσης, θεωρήστε γνωστό το ότι το $C([a, b])$ είναι πυκνό υποσύνολο του $L^2([a, b])$.

(i) Θεωρήστε τις συναρτήσεις

$$P_n(t) = \frac{(2n+1)^{1/2}}{2^{n+1/2} n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Αποδείξτε ότι κάθε P_n είναι πολυώνυμο βαθμού n και ότι το σύνολο των P_n αποτελεί ορθοκανονική βάση του $L^2([-1, 1])$. Οι συναρτήσεις P_n ονομάζονται **πολυώνυμα Legendre**.

(ii) Θεωρήστε τις συναρτήσεις

$$H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n} (e^{-t^2}), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Αποδείξτε ότι κάθε H_n είναι πολυώνυμο βαθμού n . Οι συναρτήσεις H_n ονομάζονται **πολυώνυμα Hermite**. Αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις

$$\psi_n(t) = \frac{1}{\pi^{1/4} 2^{n/2} (n!)^{1/2}} H_n(t) e^{-\frac{1}{2} t^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

αποτελούν ορθοκανονική βάση του $L^2(\mathbb{R})$.

(iii) Θεωρήστε τις συναρτήσεις

$$L_n(t) = e^t \frac{d^n}{dt^n} (t^n e^{-t}), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Αποδείξτε ότι κάθε L_n είναι πολυώνυμο βαθμού n . Οι συναρτήσεις L_n ονομάζονται **πολυώνυμα Laguerre**. Αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις

$$\phi_n(t) = \frac{1}{n!} L_n(t) e^{-\frac{1}{2}t}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

αποτελούν ορθοκανονική βάση του $L^2([0, +\infty))$.