Συναρτησιακή Ανάλυση, εαρινό εξάμηνο 2022-23.

Επαναληπτικές ασκήσεις

1. Έστω ότι ο χώρος με νόρμα X είναι αυτοπαθής. Αποδείξτε ότι για κάθε $x' \in X'$ υπάρχει $x \in X$ με $\|x\| = 1$ και $x'(x) = \|x'\|$.

2. Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει $x \in l^1$ ώστε $e_n \xrightarrow{\text{w}} x$ στον l^1;

3. Έστω χώρος Hilbert X και φραγμένος γραμμικός τελεστής T στον X. Υποθέτουμε ότι υπάρχει σταθερά $c > 0$ ώστε να ισχύει $\text{Re}\langle T(x), x\rangle \geq c\|x\|^2$ για κάθε $x \in X$.
   (i) Αποδείξτε ότι οι $\text{R}(T), \text{R}(T^*)$ είναι κλειστοί υπόχωροι του X.
   (ii) Αποδείξτε ότι $\text{R}(T) = \text{R}(T^*) = X$.

4. Έστω χώρος Hilbert X και $T \in L(X)$. Αποδείξτε ότι τα (i) και (ii) είναι ισοδύναμα:
   (i) Ο T είναι συμπαγής.
   (ii) Αν $x_n \xrightarrow{w} 0$ στον X, τότε $T(x_n) \to 0$.

5. Έστω χώρος X με δύο νόρμες: $\|\cdot\|_1$ και $\|\cdot\|_2$. Αποδείξτε ότι οι δύο νόρμες είναι ισοδύναμες, δηλαδή υπάρχουν σταθερές $c, C > 0$ ώστε να ισχύει $c\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C\|x\|_1$ για κάθε $x \in X$, αν και μόνο αν για κάθε (x_n) στον X η σύγκλιση $x_n \to 0$ ως προς τη μία νόρμα συνεπάγεται τη σύγκλιση $x_n \to 0$ ως προς την άλλη νόρμα.

6. Αποδείξτε ότι ένας χώρος X με νόρμα είναι πλήρης αν και μόνον αν κάθε απολύτως συγκλίνουσα σειρά στοιχείων του X συγκλίνει στον X.

7. Έστω X ένας γραμμικός χώρος επί του F ο οποίος είναι απειροδιάστατος και έστω B μία βάση του X. Ορίζουμε νόρμες $\|\cdot\|_1$ και $\|\cdot\|_2$ στον X με τύπους:
   $$\|x\|_1 = |\kappa_1| + \cdots + |\kappa_n|, \qquad \|x\|_2 = \max\{|\kappa_1|, \ldots, |\kappa_n|\}$$
   για κάθε $x \in X$, όπου $x = \kappa_1 b_1 + \cdots + \kappa_n b_n$ με $\kappa_1, \ldots, \kappa_n \in F$ και $b_1, \ldots, b_n \in B$. Αποδείξτε ότι οι $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ είναι νόρμες στον X και ότι δεν είναι ισοδύναμες.

8. Θεωρήστε τον l^1 και τον υπόχωρο $X = \text{span}(\{e_n \,|\, n \in \mathbb{N}\})$. Αποδείξτε ότι στον X η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} e_n$ συγκλίνει απολύτως αλλά δεν συγκλίνει.

9. Έστω X χώρος Banach. Τα στοιχεία $b_1, b_2, \ldots$ του X λέμε ότι αποτελούν **βάση Schauder** του X αν για κάθε $x \in X$ υπάρχουν μοναδικά $\kappa_1, \kappa_2, \ldots \in F$ ώστε $x = \sum_{j=1}^{+\infty} \kappa_j b_j$.
   Βρείτε βάση Schauder για καθέναν από τους l^p, $1 \leq p < +\infty$. Υπάρχει βάση Schauder για τον l^∞;

10. Έστω χώρος X με νόρμα, M κλειστός υπόχωρος του X και Y υπόχωρος του X με $\dim(Y) < +\infty$ και $M \cap Y = \{0\}$. Αποδείξτε ότι ο $M + Y$ είναι κλειστός υπόχωρος του X.
    Αποδείξτε το ίδιο αποτέλεσμα με τις ίδιες υποθέσεις εκτός της $M \cap Y = \{0\}$.

11. Έστω χώρος X με νόρμα, M κλειστός υπόχωρος του X με $\text{codim}(M) < +\infty$ και Y υπόχωρος του X. Αποδείξτε ότι ο $M + Y$ είναι κλειστός υπόχωρος του X.

12. Έστω χώρος X με εσωτερικό γινόμενο.
    (i) Αν $\|x_n\| \leq 1$, $\|y_n\| \leq 1$ και $\langle x_n, y_n\rangle \to 1$, αποδείξτε ότι $\|x_n - y_n\| \to 0$.
    (ii) Αν $\|x_n\| \to \|x\|$ και $\langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle$ για κάθε $y \in X$, αποδείξτε ότι $\|x_n - x\| \to 0$.

13. Θεωρήστε το στοιχείο $z = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} e_k = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots)$ του l^2. Αποδείξτε ότι στον κλειστό υπόχωρο $Y = \text{span}(\{z, e_2, e_3, \ldots\})$ του l^2 το $\{e_2, e_3, \ldots\}$ είναι maximal ορθοκανονικό σύνολο αλλά όχι ορθοκανονική βάση.

14. Έστω χώρος με νόρμα X και γραμμικό συναρτησοειδές x' στον X. Αποδείξτε ότι το x' είναι φραγμένο αν και μόνο αν ο πυρήνας

$$\mathrm{N}(x') = \{x \in X \mid x'(x) = 0\}$$

του x' είναι κλειστός υπόχωρος του X.

15. Έστω χώρος με νόρμα X.
(i) Αν ο Y είναι υπόχωρος του X, αποδείξτε ότι

$$Y' \overset{iso}{=} X'/Y^a.$$

Υπόδειξη: Για κάθε $[x']_{Y^a} \in X'/Y^a$ θεωρήστε τη συνάρτηση $T([x']_{Y^a}) : Y \to F$ με τύπο

$$T([x']_{Y^a})(y) = x'(y), \qquad \text{για κάθε } y \in Y.$$

Αποδείξτε ότι ο ορισμός είναι καλός και ότι ο T είναι ισομετρία του X'/Y^a με τον Y'.
(ii) Αν ο Y είναι κλειστός υπόχωρος του X, αποδείξτε ότι

$$(X/Y)' \overset{iso}{=} Y^a.$$

Υπόδειξη: Για κάθε $x' \in Y^a$ θεωρήστε τη συνάρτηση $S(x') : X/Y \to F$ με τύπο

$$S(x')([x]_Y) = x'(x) \qquad \text{για κάθε } [x]_Y \in X/Y.$$

Αποδείξτε ότι ο ορισμός είναι καλός και ότι ο S είναι ισομετρία του Y^a με τον $(X/Y)'$.

16. Έστω χώρος με νόρμα X και κλειστός υπόχωρος Y του X. Για κάθε $x \in X$ θέτουμε

$$\mathcal{P}_Y(x) = \{y_0 \in Y \mid \|x - y_0\| = d(x, Y)\},$$

όπου

$$d(x, Y) = \inf_{y \in Y} \|x - y\|.$$

Αν $x \in X \setminus Y$ και $y_0 \in Y$, αποδείξτε ότι $y_0 \in \mathcal{P}_Y(x)$ αν και μόνον αν υπάρχει $x' \in Y^a$ τέτοιο ώστε

$$\|x'\| = 1, \quad x'(x - y_0) = \|x - y_0\|.$$

17. Αν ο X είναι χώρος Banach, αποδείξτε ότι ο X είναι αυτοπαθής αν και μόνον αν ο X' είναι αυτοπαθής.
Υπόδειξη: Θεωρήστε τις φυσιολογικές εμφυτεύσεις $J_0 : X \to X''$ και $J_1 : X' \to X'''$. Αν ο X είναι αυτοπαθής, πάρτε $x''' \in X'''$, θεωρήστε το $x' = x''' \circ J_0$ και αποδείξτε ότι $x''' = J_1(x')$. Αντιστρόφως, έστω ότι ο X' είναι αυτοπαθής, ενώ ο X δεν είναι. Αποδείξτε ότι ο $J_0(X)$ είναι γνήσιος κλειστός υπόχωρος του X'' και ότι υπάρχει μη-μηδενικό $x''' \in X'''$ με $x'''(J_0(x)) = 0$ για κάθε $x \in X$. Καταλήξτε σε άτοπο.

18. Έστω τοπολογικός χώρος (π.χ. μετρικός χώρος) X και $A \subseteq X$. Το A ονομάζεται σύνολο **πρώτης κατηγορίας** στον X αν υπάρχουν $A_n \subseteq X$ με $A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ ώστε κάθε $\mathrm{cl}(A_n)$ να έχει κενό εσωτερικό. Το A ονομάζεται σύνολο **δεύτερης κατηγορίας** στον X αν δεν είναι σύνολο πρώτης κατηγορίας στον X. Ένα σύνολο πρώτης κατηγορίας σε έναν τοπολογικό χώρο θεωρείται *τοπολογικά "μικρό"* σύνολο.
[α] Αποδείξτε ότι αριθμήσιμη ένωση συνόλων πρώτης κατηγορίας στον X είναι σύνολο πρώτης κατηγορίας στον X.
[β] Αποδείξτε ότι κάθε πλήρης μετρικός χώρος είναι σύνολο δεύτερης κατηγορίας στον εαυτό του.

[γ] Έστω χώρος με νόρμα X.

(i) Αν το M είναι σύνολο δεύτερης κατηγορίας στον X', $\mathcal{F} \subseteq X$ και $\sup_{x\in\mathcal{F}} |x'(x)| < +\infty$ για κάθε $x' \in M$, αποδείξτε ότι $\sup_{x\in\mathcal{F}} \|x\| < +\infty$.

(ii) Αν το M είναι σύνολο δεύτερης κατηγορίας στον X, $\mathcal{F} \subseteq X'$ και $\sup_{x'\in\mathcal{F}} |x'(x)| < +\infty$ για κάθε $x \in M$, αποδείξτε ότι $\sup_{x'\in\mathcal{F}} \|x'\| < +\infty$.

19. (i) Έστω $1 \leq p < +\infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ και ακολουθία $x = (x_1, x_2, \ldots)$ στο F. Αν για κάθε $y = (y_1, y_2, \ldots) \in l^p$ η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k y_k$ συγκλίνει, αποδείξτε ότι $x \in l^q$.
Υπόδειξη: Για κάθε n θεωρήστε το $l_n \in (l^p)^*$ με τύπο $l_n(y) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$ για κάθε $y \in l^p$ και υπολογίστε τη νόρμα του l_n.
(ii) Έστω ακολουθία $x = (x_1, x_2, \ldots)$ στο F. Αν για κάθε $y = (y_1, y_2, \ldots) \in c_0$ η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k y_k$ συγκλίνει, αποδείξτε ότι $x \in l^1$.

20. Έστω χώρος με νόρμα X και υπόχωρος L του X'. Λέμε ότι ο L **προσδιορίζει τη νόρμα** του X αν υπάρχει $c > 0$ ώστε

$$c\|x\| \leq \sup_{x'\in L,\, \|x'\|\leq 1} |x'(x)| \qquad \text{για κάθε } x \in X.$$

Τώρα έστω χώρος X με νόρμα $\|\cdot\|$ και υπόχωρος L του X' ο οποίος προσδιορίζει τη νόρμα του X.

(i) Θέτουμε

$$\|x\|' = \sup_{x^*\in L,\, \|x^*\|\leq 1} |x^*(x)| \qquad \text{για κάθε } x \in X.$$

Αποδείξτε ότι η $\|\cdot\|'$ είναι νόρμα στον X ισοδύναμη με την $\|\cdot\|$.

(ii) Αν $\mathcal{F} \subseteq X$ και $\sup_{x\in\mathcal{F}} |x'(x)| < +\infty$ για κάθε $x' \in L$, αποδείξτε ότι $\sup_{x\in\mathcal{F}} \|x\| < +\infty$.

21. Έστω χώρος με νόρμα X.
(i) Έστω $\mathrm{clspan}(L) = X'$. Αν $x'(x_n) \to x'(x)$ για κάθε $x' \in L$ και $\sup_n \|x_n\| < +\infty$, αποδείξτε ότι $x_n \xrightarrow{w} x$ στον X.
(ii) Έστω $\mathrm{clspan}(L) = X$. Αν $x'_n(x) \to x'(x)$ για κάθε $x \in L$ και $\sup_n \|x'_n\| < +\infty$, αποδείξτε ότι $x'_n \xrightarrow{w*} x'$ στον X'.

22. Αποδείξτε ότι $e_n \xrightarrow{w} 0$ στους c, c_0 και ότι η (e_n) δεν έχει ασθενές όριο στον l^1.

23. Έστω $1 < p < +\infty$.
(i) Αποδείξτε ότι $x_n \xrightarrow{w} x$ στον l^p αν και μόνο αν $\sup_n \|x_n\|_p < +\infty$ και $x_n^{(m)} \to x^{(m)}$ στο F για κάθε $m \in \mathbb{N}$, όπου $x_n = (x_n^{(m)})$ και $x = (x^{(m)})$.
(ii) Έστω $x_n \xrightarrow{w} x$ στον l^p. Αποδείξτε ότι $x_n \to x$ αν και μόνο αν $\|x_n\| \to \|x\|$.

24. Έστω ακολουθία $\kappa = (\kappa_n)$ στο F. Θεωρήστε τον τελεστή T με τύπο

$$T(x) = (\kappa_1 x_1, \kappa_2 x_2, \ldots) \qquad \text{για κάθε } x = (x_1, x_2, \ldots).$$

(i) Αποδείξτε ότι $T \in L(l^p)$ αν και μόνο αν $\kappa \in l^\infty$ και ότι σ' αυτήν την περίπτωση ισχύει $\|T\| = \|\kappa\|_\infty$.
(ii) Αν $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $1 \leq p < +\infty$ και $\kappa \in l^\infty$, βρείτε τον δυικό τελεστή $T' \in L(l^q)$ του $T \in L(l^p)$.

25. Θεωρήστε τους τελεστές $S_l, S_r : l^p \to l^p$ με τύπους

$$S_l(x) = (x_2, x_3, \ldots), \quad S_r(x) = (0, x_1, x_2, \ldots) \qquad \text{για κάθε } x = (x_1, x_2, \ldots) \in l^p.$$

Ο S_l ονομάζεται **αριστερή μετάθεση** και ο S_r ονομάζεται **δεξιά μετάθεση**.

(i) Αποδείξτε ότι και οι δύο τελεστές είναι φραγμένοι και ότι $\|S_l\| = \|S_r\| = 1$.

(ii) Αν $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $1 \leq p < +\infty$, βρείτε τους δυικούς τελεστές $S_l', S_r' \in L(l^q)$ των $S_l, S_r \in L(l^p)$.

26. Έστω χώροι με νόρμα X, Y και γραμμικός τελεστής $T : X \to Y$. Αποδείξτε ότι ο $T : X \to \mathrm{R}(T)$ έχει φραγμένο αντίστροφο αν και μόνον αν υπάρχει $c > 0$ ώστε να ισχύει

$$c\|x\| \leq \|T(x)\| \qquad \text{για κάθε } x \in X.$$

27. Έστω χώρος Hilbert X και $T \in L(X)$. Αν υπάρχει $c > 0$ ώστε να ισχύει

$$\mathrm{Re}\langle T(x), x\rangle \geq c\|x\|^2 \qquad \text{για κάθε } x \in X,$$

αποδείξτε ότι $\mathrm{R}(T^*) = X$.

Υπόδειξη: Πρώτα αποδείξτε ότι ο $\mathrm{R}(T^*)$ είναι κλειστός υπόχωρος του X.

28. Έστω χώρος Hilbert X και $T \in L(X)$. Αποδείξτε ότι οι $I + T^*T$ και $I + TT^*$ είναι αυτοσυζυγείς και έχουν φραγμένους αντίστροφους.

Υπόδειξη: Αποδείξτε ότι $\langle (I + T^*T)(x), x\rangle \geq \|x\|^2$ για κάθε $x \in X$.

29. Έστω χώροι με νόρμα X, Y και γραμμικός τελεστής $T : X \to Y$. Αν $y' \circ T \in X'$ για κάθε $y' \in Y'$, αποδείξτε ότι $T \in L(X, Y)$.

Υπόδειξη: Αρχή Ομοιόμορφου Φράγματος.

30. Έστω χώροι με νόρμα X, Y ένας τουλάχιστον εκ των οποίων είναι χώρος Banach. Αν η $B : X \times Y \to F$ έχει την ιδιότητα ότι για κάθε $x \in X$ ισχύει $B(x, \cdot) \in Y'$ και για κάθε $y \in Y$ ισχύει $B(\cdot, y) \in X'$, αποδείξτε ότι υπάρχει $C \geq 0$ ώστε να ισχύει $|B(x, y)| \leq C\|x\|\|y\|$ για κάθε $x \in X$ και $y \in Y$.

Υπόδειξη: Αρχή Ομοιόμορφου Φράγματος.

31. Έστω χώρος με νόρμα X και ακολουθία (x_n) στον X ώστε να ισχύει $\sum_{n=1}^{+\infty} |x'(x_n)| < +\infty$ για κάθε $x' \in X'$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $C \geq 0$ ώστε να ισχύει $\sum_{n=1}^{+\infty} |x'(x_n)| \leq C\|x'\|$ για κάθε $x' \in X'$.

Υπόδειξη: Αρχή Ομοιόμορφου Φράγματος με τις συναρτήσεις $f_N(x') = \sum_{n=1}^{N} |x'(x_n)|$.

32. Έστω κλειστός υπόχωρος X του $L^1([0, 1])$. Αν για κάθε $f \in X$ υπάρχει $p > 1$ ώστε $f \in L^p([0, 1])$, αποδείξτε ότι υπάρχει $p > 1$ ώστε $X \subseteq L^p([0, 1])$.

33. Έστω γραμμικός χώρος X με δύο νόρμες $\|\cdot\|_1$ και $\|\cdot\|_2$, ο οποίος είναι πλήρης και με τις δύο νόρμες. Αν υπάρχει $C > 0$ ώστε να ισχύει $\|x\|_1 \leq C\|x\|_2$ για κάθε $x \in X$, αποδείξτε ότι οι δύο νόρμες είναι ισοδύναμες.

Υπόδειξη: Θεώρημα Ανοικτής Απεικόνισης.

34. Έστω γραμμικός χώρος X με δύο νόρμες $\|\cdot\|_1$ και $\|\cdot\|_2$, ο οποίος είναι πλήρης και με τις δύο νόρμες. Υποθέτουμε ότι, αν μία ακολουθία (x_n) στον X συγκλίνει στο x ως προς την $\|\cdot\|_1$ και στο x' ως προς την $\|\cdot\|_2$, τότε $x = x'$. Αποδείξτε ότι οι δύο νόρμες είναι ισοδύναμες.

Υπόδειξη: Θεώρημα Κλειστού Γραφήματος.

35. Έστω $\|\cdot\|$ οποιαδήποτε νόρμα στον $C([0, 1])$ με την οποία ο $C([0, 1])$ είναι πλήρης. Αν για κάθε (f_n) και f στον $C([0, 1])$ με $\|f_n - f\| \to 0$ συνεπάγεται ότι $f_n \to f$ κατά σημείο στο $[0, 1]$, αποδείξτε ότι η $\|\cdot\|$ είναι ισοδύναμη με την ομοιόμορφη νόρμα.

36. Έστω χώρος Hilbert X και γραμμικός τελεστής $T : X \to X$. Υποθέτουμε ότι ισχύει $\langle T(x), y\rangle = \langle x, T(y)\rangle$ για κάθε $x, y \in X$. Αποδείξτε ότι ο T είναι φραγμένος.

    Υπόδειξη: Θεώρημα Κλειστού Γραφήματος.

37. Έστω κλειστός υπόχωρος X του $C([0,2])$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $f \in C([0,1])$ υπάρχει $F \in X$ της οποίας ο περιορισμός στο $[0,1]$ είναι η f. Αποδείξτε ότι υπάρχει σταθερά $M \geq 0$ ώστε για κάθε $f \in C([0,1])$ να υπάρχει $F \in X$ με $\|F\|_\infty \leq M\|f\|_\infty$ της οποίας ο περιορισμός στο $[0,1]$ είναι η f.

38. Έστω κλειστός υπόχωρος X του $L^1([0,2])$ ώστε για κάθε $f \in L^1([0,1])$ να υπάρχει $F \in X$ της οποίας ο περιορισμός στο $[0,1]$ είναι η f. Αποδείξτε ότι υπάρχει $C \geq 0$ ώστε για κάθε $f \in L^1([0,1])$ να υπάρχει $F \in X$ με $\|F\|_1 \leq C\|f\|_1$ της οποίας ο περιορισμός στο $[0,1]$ είναι η f.

39. Έστω χώροι Banach X, Y και $T \in L(X,Y)$. Αποδείξτε ότι ο $\mathrm{R}(T)$ είναι κλειστός υπόχωρος του Y αν και μόνον αν υπάρχει $C > 0$ ώστε να ισχύει $\inf_{z\in \mathrm{N}(T)} \|x - z\| \leq C\|T(x)\|$ για κάθε $x \in X$.

40. Έστω χώροι με νόρμα X, Y και συμπαγής $T \in L(X,Y)$. Αποδείξτε ότι ο $\mathrm{R}(T)$ είναι διαχωρίσιμος.

41. Έστω χώρος Hilbert X και $T, S \in L(X)$. Αποδείξτε ότι $(T+S)^* = T^*+S^*$, $(\kappa T)^* = \overline{\kappa}T^*$, $(TS)^* = S^*T^*$. Επίσης, αν $T^{-1} \in L(X)$, αποδείξτε ότι $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$.

42. Έστω χώρος Hilbert X επί του $\mathbb{C}$ και $T \in L(X)$. Αν $\langle T(x), x\rangle = 0$ για κάθε $x \in X$, αποδείξτε ότι $T = 0$.

43. Έστω χώρος Hilbert X και $T \in L(X)$. Αποδείξτε ότι $\|T\|^2 = \|TT^*\| = \|T^*T\|$.

44. Έστω χώρος Hilbert X και $P \in L(X)$. Ο τελεστής P ονομάζεται **προβολή** αν $P^2 = P$. Ο P ονομάζεται **ορθογώνια προβολή** αν $P^2 = P$ και $P^* = P$.

    (i) Αποδείξτε ότι ο $P \in L(X)$ είναι προβολή αν και μόνο αν ο περιορισμός του στον υπόχωρο $\mathrm{R}(P)$ είναι ο ταυτοτικός τελεστής. Επίσης, αν ο $P \in L(X)$ είναι προβολή, αποδείξτε ότι ο $\mathrm{R}(P)$ είναι κλειστός υπόχωρος του X.

    (ii) Αν ο $P \in L(X)$ είναι προβολή, αποδείξτε ότι ο P είναι ορθογώνια προβολή αν και μόνο αν ο περιορισμός του στον $\mathrm{R}(P)^\perp$ είναι ο μηδενικός τελεστής αν και μόνο αν $\mathrm{N}(P) = \mathrm{R}(P)^\perp$.

45. Έστω χώρος Hilbert X και $T \in L(X)$. Αποδείξτε ότι $\mathrm{N}(T^*) = \mathrm{R}(T)^\perp$, $\mathrm{N}(T) = \mathrm{R}(T^*)^\perp$, $\mathrm{cl}(\mathrm{R}(T^*)) = \mathrm{N}(T)^\perp$, $\mathrm{cl}(\mathrm{R}(T)) = \mathrm{N}(T^*)^\perp$. Συμπεράνατε ότι ο T είναι ένα-προς-ένα αν και μόνο αν ο T^* έχει πυκνό σύνολο τιμών και ότι ο T έχει πυκνό σύνολο τιμών αν και μόνο αν ο T^* είναι ένα-προς-ένα.