

## ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ, χειμερινό εξάμηνο 2012-13.

### Οδηγίες προς ναυτιλομένους, I.

Στα παρακάτω, όταν λέω *διαβάστε την Πρόταση ή το Θεώρημα ή το Λήμμα τάδε*, εννοώ *διαβάστε τις εκφωνήσεις τους και όχι υποχρεωτικά τις αποδείξεις τους*.

**Ενότητα 1.1.** Διαβάστε σχετικά προσεκτικά ολόκληρη την ενότητα ώστε να έχετε την απαραίτητη εξοικείωση με την έννοια του *συνόλου μηδενικού μέτρου*.

**Ενότητα 1.2.** Η Πρόταση 1.2 αξίζει να διαβαστεί προσεκτικά για την γενικότερη παιδεία σας στα θέματα της Ανάλυσης. Θα πρότεινα να βρείτε και να διαβάσετε το γενικότερο αποτέλεσμα για τα *συμπαγή σύνολα*. Εξοικειωθείτε με τους συμβολισμούς για τα  $f \pm g$ ,  $fg$ ,  $\max\{f, g\}$  κλπ. καθώς και με τους ορισμούς και τις Προτάσεις 1.3 και 1.4 για τις κλιμακωτές συναρτήσεις και τα ολοκληρώματά τους. Τέλος, διαβάστε προσεκτικά τα Λήμματα A και B. Από τις αποδείξεις τους καλό είναι να δείτε προσεκτικά τις πρώτες-πρώτες παραγράφους τους, πριν από το κύριο μέρος των αποδείξεων, που απλώς επεξηγούν κάπως τα λήμματα.

**Ενότητα 1.3.** Διαβάστε τον ορισμό της συλλογής  $C_1$ , το σχόλιο που ακολουθεί και τα παραδείγματα. Διαβάστε την Πρόταση 1.1 και τον ορισμό του ολοκληρώματος για συναρτήσεις στην  $C_1$ . Διαβάστε τις Προτάσεις 1.6 και 1.7 και το σχόλιο και το παράδειγμα (συνάρτηση Dirichlet) μετά από την Πρόταση 1.7.

**Ενότητα 1.4.** Διαβάστε τον ορισμό και τα σχόλια για τη συλλογή  $C_2$ . Διαβάστε την Πρόταση 1.8 και τα σχόλιά της. Διαβάστε τον ορισμό και τις Προτάσεις 1.9 και 1.10 για τα ολοκληρώματα των συναρτήσεων στην  $C_2$  και τα σχόλια μετά από την Πρόταση 1.10. Διαβάστε τον ορισμό των Lebesgue ολοκληρώσιμων συναρτήσεων, τα σχόλια μετά από αυτόν και την Πρόταση 1.11.

**Ενότητα 1.5.** Η ενότητα αυτή είναι πολύ σημαντική για την έννοια του ολοκληρώματος Lebesgue. Διαβάστε πολύ προσεκτικά τα τρία βασικά οριακά θεωρήματα: το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης, το Θεώρημα Σύγκλισης Σειράς και το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης καθώς και τα σχόλια που τα ακολουθούν. Διαβάστε και την Πρόταση 1.12. Κατόπιν, δώστε βάρος στο Θεώρημα 1.1, στο σχόλιο πριν από αυτό καθώς και στα πέντε παραδείγματα μετά από αυτό. Διαβάστε πολύ προσεκτικά τα σχετικά με τις χαρακτηριστικές συναρτήσεις, τις μεταφορές και τα ομοιόθετα συνόλων και συναρτήσεων. Θα βοηθούσε, αν και δεν είναι απολύτως απαραίτητο, να διαβάσετε τα τέσσερα επόμενα παραδείγματα (κυρίως το τέταρτο). Τώρα, το Θεώρημα 1.2, οι Προτάσεις 1.13 και 1.14 και το Λήμμα του Fatou χρειάζεται να τα διαβάσετε μόνο αν είστε διατεθειμένοι να διαβάσετε προσεκτικά και αυστηρά διάφορες αποδείξεις προτάσεων και θεωρημάτων στις επόμενες ενότητες και κεφάλαια. Έχουν να κάνουν περισσότερο με το αν, για παράδειγμα, κάποιες συναρτήσεις που θα συναντήσουμε σε κάποια απόδειξη είναι ολοκληρώσιμες ή όχι και λιγότερο με τον χειρισμό ή τις σχέσεις ανάμεσα στα ολοκληρώματά τους. Στο μάθημα αυτό μας ενδιαφέρουν περισσότερο ο χειρισμός ολοκληρωμάτων και οι σχέσεις ανάμεσα σε ολοκληρώματα. Τέλος, διαβάστε την Πρόταση 1.15 και τα ακόλουθα παραδείγματα.

**Ενότητα 1.6.** Διατρέξτε με σχετική προσοχή την ενότητα αυτή για να δείτε πώς περνάμε από τα ολοκληρώματα στο  $\mathbb{R}$  σε ολοκληρώματα σε διαστήματα και από ολοκληρώματα πραγματικών συναρτήσεων σε ολοκληρώματα μιγαδικών συναρτήσεων. Στο υπόλοιπο του μαθήματος θα δουλεύουμε με ολοκληρώματα μιγαδικών συναρτήσεων σε διαστήματα. Ειδικότερα, διαβάστε τις Προτάσεις 1.16 και 1.17.

**Ενότητα 1.7.** Δεν χρειάζεται να ασχοληθείτε με αυτήν την ενότητα παρά μόνο αν θέλετε να ασχοληθείτε προσεκτικά και αυστηρά με το γιατί ορίζεται η *συνέλιξη συναρτήσεων* που συναντάμε στην επόμενη ενότητα. Επίσης, η ενότητα αυτή θα χρησιμεύσει αν, για δικούς σας λόγους, θέλετε να κατανοήσετε την *αρμονική ανάλυση για πολυδιάστατες συναρτήσεις*. Αν κάτι θέλετε να διαβάσετε από αυτήν την ενότητα, θα σας πρότεινα το Θεώρημα του Fubini, το οποίο αναφέρεται στην πολλές φορές χρήσιμη εναλλαγή ολοκληρωμάτων.

**Ενότητα 1.8.** Από το σημείο αυτό περνάμε σιγά-σιγά στο κύριο μέρος του μαθήματος, την *Αρμονική Ανάλυση*. Διαβάστε τον ορισμό και τα σχόλια για τον  $L^1(I)$ , την Πρόταση 1.20 και τον ορισμό της 1-νόρμας και της 1-απόστασης. Διαβάστε τις Προτάσεις 1.21 και 1.22 (με τις αποδείξεις τους) και τα σχόλια μετά την Πρόταση 1.22. Διαβάστε τον ορισμό της σύγκλισης στον  $L^1(I)$  και την Πρόταση 1.23 (με την απόδειξή της) και το σχόλιο

της. Διαβάστε τον ορισμό της ακολουθίας Cauchy στον  $L^1(I)$  και το Θεώρημα 1.3 (με την απόδειξή του). Διαβάστε τους ορισμούς και τα σχόλια για γενικούς χώρους με νόρμα και χώρους Banach. Δίνω μεγάλη σημασία στην ένταξη αυτών που μαθαίνουμε σε ευρύτερα πλαίσια, ειδικά όταν αυτά τα ευρύτερα πλαίσια είναι εξαιρετικά σημαντικά για την Ανάλυση (και τα μαθηματικά και την επιστήμη γενικότερα): τέτοια πλαίσια είναι οι χώροι Banach και οι χώροι Hilbert που θα δούμε στην επόμενη ενότητα. Διαβάστε την Πρόταση 1.24. Κατόπιν, διαβάστε προσεκτικά την Πρόταση 1.25. Από την απόδειξή της δείτε τον ορισμό της βοηθητικής συνάρτησης  $H(x, y)$  στην αρχή και περάστε κατ' ευθείαν στο τέλος, στις αποδείξεις των τύπων  $\int_{\mathbb{R}} h = \int_{\mathbb{R}} f \int_{\mathbb{R}} g$  και  $\int_{\mathbb{R}} |h| \leq \int_{\mathbb{R}} |f| \int_{\mathbb{R}} |g|$ . Διαβάστε τις πάρα πολύ προσεκτικά. Εδώ πρέπει να δεχτείτε χωρίς απόδειξη τη σχετική εναλλαγή ολοκληρωμάτων. Στο μάθημα αυτό, σχεδόν όποτε γίνεται εναλλαγή ολοκληρωμάτων αυτή δικαιολογείται με το Θεώρημα του Fubini, και δεν θα απαιτείται η αιτιολόγησή της. Επομένως, θα μπορείτε να κάνετε ελεύθερα εναλλαγή ολοκληρωμάτων. Διαβάστε τον ορισμό της συνέλιξης και δείτε το σχετικό παράδειγμα, συμπληρώνοντας προσεκτικά τις πράξεις που λείπουν. Διαβάστε την Πρόταση 1.26 (με την απόδειξή της, προσεκτικά). Διαβάστε τον ορισμό της μεταθετικής άλγεβρας και την Πρόταση 1.27 (με την απόδειξή της). Διαβάστε τον ορισμό της 1-περιοδικότητας για σύνολα και συναρτήσεις και τα σχόλια που ακολουθούν. Διαβάστε την Πρόταση 1.28. Διαβάστε τον ορισμό της 1-περιοδικής επέκτασης και τα σχετικά σχόλια. Διαβάστε την Πρόταση 1.29 και τον ορισμό της συνέλιξης 1-περιοδικών συναρτήσεων. Αντί της απόδειξης της Πρότασης 1.29, διαβάστε, πολύ προσεκτικά, το σχόλιο μετά από τον τελευταίο ορισμό, όπου γίνεται η (όχι τόσο αυστηρή αλλά πλήρως αποδεκτή για τώρα) απόδειξη των  $\int_{[0,1]} (f * g) = \int_{[0,1]} f \int_{[0,1]} g$  και  $\int_{[0,1]} |f * g| \leq \int_{[0,1]} |f| \int_{[0,1]} |g|$ . Διαβάστε την Πρόταση 1.30 και πολύ προσεκτικά το παράδειγμα που ακολουθεί για τα εκθετικά πολυώνυμα. Είμαστε στην καρδιά της Αρμονικής Ανάλυσης. Δείτε και την Πρόταση 1.31. Διαβάστε τα Λήμματα 1.4 και 1.5 (με τις αποδείξεις τους) και τα επόμενα σχόλια. Διαβάστε τον ορισμό των χώρων  $C^k(\mathbb{R})$  και  $C_c^k(\mathbb{R})$  και τα παραδείγματα και το σχετικό σχόλιο. Διαβάστε την Πρόταση 1.32 (με τις αποδείξεις των [2], [3], [4]). Διαβάστε τα σχετικά με τις μεταφορές και την Πρόταση 1.33 (με την απόδειξή της). Διαβάστε τα σχετικά με τα ομοιώματα και την Πρόταση 1.34 (με την απόδειξή της). Διαβάστε τον ορισμό του πυκνού υποσυνόλου και την Πρόταση 1.35 (με την απόδειξή της). Διαβάστε τον ορισμό του διαχωρίσιμου χώρου και την Πρόταση 1.36 (με την απόδειξή της). Διαβάστε τις Προτάσεις 1.37 και 1.38. Αντί της απόδειξης της Πρότασης 1.38, διαβάστε πολύ προσεκτικά το σχόλιο [1] αμέσως μετά από την Πρόταση 1.38. Τέλος, διαβάστε τον ορισμό των χώρων  $C_p^k(\mathbb{R})$  και τις Προτάσεις 1.39 και 1.40.