ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ, χειμερινό εξάμηνο 2012-13.

Οδηγίες προς ναυτιλομένους, ΙΙ.

Στα παρακάτω, όταν λέω *διαβάστε την Πρόταση ή το Θεώρημα ή το Λήμμα τάδε*, εννοώ *διαβάστε τις εκφωνήσεις τους και όχι υποχρεωτικά τις αποδείξεις τους*.

Ενότητα 1.9. Μην δώσετε μεγάλη σημασία στον ορισμό της μετρησιμότητας και στην Πρόταση 1.41 (εκτός αν θέλετε να παρακολουθήσετε το τί γίνεται με αυστηρότητα). Διαβάστε τους ορισμούς της τετραγωνικής ολοκληρωσιμότητας, του χώρου $L^2(I)$ και του εσωτερικού γινομένου και της νόρμας στον $L^2(I)$ καθώς και τις Προτάσεις 1.42, 1.43, 1.44, 1.45 και 1.46 και την ανισότητα Schwarz - Bunyakovsky και τις αποδείξεις τους. Διαβάστε τον ορισμό της ορθογωνιότητας και της κανονικότητας και το Θεώρημα 1.4. Διαβάστε προσεκτικά τα γενικά για χώρους με εσωτερικό γινόμενο και χώρους Hilbert. Διαβάστε το Λήμμα 1.6 με την απόδειξή του. Διαβάστε την Πρόταση 1.49. Διαβάστε την Πρόταση 1.50 και τον ορισμό της συνέλιξης που την ακολουθεί. Αντί της αυστηρής απόδειξης της Πρότασης 1.50, διαβάστε την πιο χαλαρή απόδειξη στο σχόλιο [2] αμέσως μετά. Διαβάστε τις Προτάσεις 1.51, 1.52 τον ορισμό της συνέλιξης 1-περιοδικών συναρτήσεων και την Πρόταση 1.53. Δείτε προσεκτικά το παράδειγμα συνέλιξης εκθετικών πολυωνύμων. Διαβάστε τις Προτάσεις 1.54 έως 1.61. Διαβάστε το Πυθαγόρειο Θεώρημα με την απόδειξή του. Διαβάστε τον ορισμό της ορθοκανονικότητας. Από το σημείο αυτό και μέχρι το τέλος της ενότητας πρέπει να διαβάσετε προσεκτικά *τα πάντα*. Μην ξεχνάτε ότι δεν πρόκειται να σας εξετάσω σε όλα αυτά. Τα θεωρώ, όμως, πολύ σημαντικά για την πλήρη κατανόηση των παρακάτω.

Ενότητα 2.1. Όλα όσα περιέχονται (αποτελέσματα και αποδείξεις) σ' αυτήν την ενότητα πρέπει να τα γνωρίζετε πάρα πολύ καλά. *Εξαιρέσεις:* η απόδειξη του Λήμματος 2.3 και οι αποδείξεις των Θεωρημάτων 2.3 και 2.4. Υπάρχει ένα συμπλήρωμα του Θεωρήματος 2.4 το οποίο είναι χρήσιμο σε μερικές ασκήσεις και κατά λάθος το παρέλειψα από τις σημειώσεις. Το αποτέλεσμα αυτό είναι το εξής.

Θεώρημα 1. Έστω 1-περιοδική $f \in L^1([0,1))$. Αν στον x_0 υπάρχουν τα πλευρικά όρια $f(x_0-) = \lim_{x\to x_0-} f(x)$ και $f(x_0+) = \lim_{x\to x_0+} f(x)$ της f, και αν υπάρχουν η αριστερή και η δεξιά πλευρική παράγωγος της f στον x_0, δηλαδή τα όρια

$$f'(x_0-) = \lim_{x\to x_0-} \frac{f(x)-f(x_0-)}{x-x_0}, \qquad f'(x_0+) = \lim_{x\to x_0+} \frac{f(x)-f(x_0+)}{x-x_0},$$

(και είναι αριθμοί), τότε η σειρά Fourier της f συγκλίνει στον x_0 και το άθροισμά της στον x_0 είναι ίσο με το $\frac{f(x_0-)+f(x_0+)}{2}$. Δηλαδή

$$\textstyle\sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) e^{2\pi i k x_0} = s_n(f)(x_0) \to \frac{f(x_0-)+f(x_0+)}{2}$$

όταν $n \to +\infty$ ή, ισοδύναμα,

$$\textstyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(k) e^{2\pi i k x_0} = \frac{f(x_0-)+f(x_0+)}{2}.$$

Ειδικώτερα, αν η f είναι παραγωγίσιμη στον x_0, τότε $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(k) e^{2\pi i k x_0} = f(x_0)$.

Ενότητα 2.2. Από την μικρή αυτή ενότητα θα μελετήσετε προσεκτικά τα πάντα.

Ενότητα 3.1. Θα μελετήσετε τα πάντα προσεκτικά. *Εξαιρέσεις:* Μην δώσετε σημασία στον χώρο $L^\infty(\mathbb{R})$ εν αντιθέσει με τον χώρο $C_0(\mathbb{R})$. Θεωρήστε τον τύπο $\|a\|_\infty = \max\{|a(\xi)| \,|\, \xi \in \mathbb{R}\}$ ως *ορισμό* της νόρμας για συναρτήσεις $a \in C_0(\mathbb{R})$. Δεν χρειάζεται να διαβάσετε την απόδειξη του Λήμματος 3.3 (την οποία δεν πρόλαβα να παρουσιάσω στο μάθημα). Όποιος, όμως, θέλει να μάθει πώς εφαρμόζεται η Μιγαδική Ανάλυση σε τέτοιου είδους καταστάσεις καλό θα ήταν να την διαβάσει. Ένα ακόμη τέτοιο παράδειγμα είναι στον υπολογισμό του μετασχηματισμού Fourier της συνάρτησης του Gauss (το οποίο παρουσίασα στο μάθημα). Επίσης, το Θεώρημα 3.5 έχει το εξής συμπλήρωμα.

Θεώρημα 2. Έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$. Αν στον x_0 υπάρχουν τα $f(x_0-) = \lim_{x\to x_0-} f(x)$ και $f(x_0+) = \lim_{x\to x_0+} f(x)$ και αν υπάρχουν η αριστερή και η δεξιά πλευρική παράγωγος της f στον x_0, δηλαδή τα όρια

$$f'(x_0-) = \lim_{x\to x_0-} \frac{f(x)-f(x_0-)}{x-x_0}, \qquad f'(x_0+) = \lim_{x\to x_0+} \frac{f(x)-f(x_0+)}{x-x_0},$$

(και είναι αριθμοί), τότε

$$\textstyle\int_{-\eta}^{\eta} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x_0}\, d\xi \to \frac{f(x_0-)+f(x_0+)}{2}$$

όταν $\eta \to +\infty$. Ειδικώτερα, το όριο αυτό ισχύει αν η f είναι παραγωγίσιμη στον x_0.

Ενότητα 3.2. Τα πάντα προσεκτικά. Από το σημείο που εισάγονται οι συναρτήσεις Hermite και πέρα δεν πρόλαβα να παρουσιάσω όλες τις αποδείξεις. Σας παρακαλώ να τις διαβάσετε διότι πιστεύω ότι παρουσιάζουν ενδιαφέρον. *Εξαίρεση:* Δεν πρόλαβα να παραδώσω την Πρόταση 3.14, οπότε μην ασχοληθείτε μαζί της.