Πρώτο φυλλάδιο ασκήσεων.

Όπως έχω πει, δεν θα εξεταστείτε σε ασκήσεις παρόμοιες με τις ασκήσεις αυτού του φυλλαδίου. Πάντως, νομίζω ότι αρκετές από τις ασκήσεις αυτές είναι αρκετά διαφωτιστικές για το πρώτο μέρος του μαθήματος, δηλαδή για την έννοια του ολοκληρώματος Lebesgue.
Θα συνιστούσα να ασχοληθείτε με όσες περισσότερες ασκήσεις μπορείτε.
Οι 1 - 8 σχετίζονται με την έννοια του μηδενικού μέτρου. Οι 10 - 13 είναι για εξοικείωση με τις κλιμακωτές συναρτήσεις και με τα Λήμματα Α και Β. Οι 14, 15 είναι για άμεση αναγνώριση ολοκληρώσιμων συναρτήσεων και για υπολογισμό των ολοκληρωμάτων τους με βάση το ολοκλήρωμα Riemann και το γενικευμένο ολοκλήρωμα Riemann. Στις 16, 17 υπάρχουν μερικές απλές ανισότητες. Στις 18 - 23 υπάρχουν άμεσες (θεωρητικές) εφαρμογές των Θεωρημάτων Μονότονης και Κυριαρχημένης Σύγκλισης. Η 21 είναι πολύ χρήσιμη για να αποφασίσει κανείς αν το γινόμενο δυο συναρτήσεων είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Τέλος, στις 24 - 30 υπάρχουν εφαρμογές των οριακών θεωρημάτων σε συγκεκριμένα παραδείγματα.

1. Δείτε κατ' ευθείαν ότι ένα αριθμήσιμο σύνολο είναι μηδενικού μέτρου. Έχουμε δυο περιπτώσεις.

   Έστω πεπερασμένο σύνολο $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Περιγράψτε συγκεκριμένα ανοικτά διαστήματα $I_1, \ldots, I_n$ ώστε $x_k \in I_k$ για κάθε $k = 1, \ldots, n$ και $l(I_1) + \cdots + l(I_n) < \epsilon$.

   Κάντε το ίδιο για ένα άπειρο αριθμήσιμο σύνολο $\{x_1, x_2, \ldots\}$.

2. Έστω διαστήματα $I_1, \ldots, I_n$ ώστε $[0,1] \cap \mathbb{Q} \subseteq I_1 \cup \cdots \cup I_n$. Αποδείξτε ότι $l(I_1) + \cdots + l(I_n) \geq 1$.

   (Υπόδειξη: Θεωρήστε τα αντίστοιχα κλειστά διαστήματα $J_1, \ldots, J_n$ και αποδείξτε – με άτοπο – ότι $[0,1] \subseteq J_1 \cup \cdots \cup J_n$.)

3. Αποδείξτε ότι κάθε διάστημα με θετικό μήκος δεν είναι μηδενικού μέτρου.

   (Υπόδειξη: Έστω *κλειστό* διάστημα I με $l(I) > 0$. Αν το I είναι μηδενικού μέτρου, τότε υπάρχουν αριθμήσιμου πλήθους ανοικτά διαστήματα $I_1, I_2, \ldots$ ώστε $I \subseteq \bigcup_n I_n$ και $\sum_n l(I_n) < l(I)$. Τότε υπάρχει N ώστε $I \subseteq \bigcup_{n=1}^N I_n$ και $\sum_{n=1}^N l(I_n) < l(I)$. Αυτό είναι άτοπο. Τί γίνεται αν το διάστημα I δεν είναι κλειστό;)

4. Έστω $E \subseteq [0,1]$ και $F = \{x^2 : x \in E\}$. Αν το E είναι μηδενικού μέτρου, αποδείξτε ότι και το F είναι μηδενικού μέτρου.

   (Υπόδειξη: Έστω $\epsilon > 0$. Υπάρχουν διαστήματα $I_1, I_2, \ldots$ ώστε $E \subseteq \bigcup_n I_n$ και $\sum_n l(I_n) < \epsilon$. Θεωρήστε τα διαστήματα $I_n' = I_n \cap [0,1]$, οπότε $E \subseteq \bigcup_n I_n'$ και $\sum_n l(I_n') < \epsilon$. Για κάθε I_n' θεωρήστε το αντίστοιχο διάστημα J_n με άκρα τα τετράγωνα των άκρων του I_n'. Αποδείξτε ότι $F \subseteq \bigcup_n J_n$, και $\sum_n l(J_n) < 2\epsilon$.)

5. Αποδείξτε ότι τα στοιχεία του συνόλου του Cantor είναι ακριβώς όλοι οι αριθμοί στο $[0,1]$ οι οποίοι έχουν τριαδικό ανάπτυγμα από το οποίο λείπει τελείως το τριαδικό ψηφίο 1.

   Έστω A το σύνολο των $x \in [0,1]$ από τη δεκαδική παράσταση των οποίων λείπει τελείως ένα συγκεκριμένο δεκαδικό ψηφίο – το 6 για παράδειγμα. Ακολουθήστε την επαγωγική διαδικασία κατασκευής του συνόλου του Cantor, χωρίζοντας κάθε φορά σε δέκα (αντί τρία) υποδιαστήματα, για να απεικονίσετε το σύνολο A στην πραγματική ευθεία και για να γράψετε το A ως $A = \bigcap_{n=1}^{+\infty} F_n$, όπου τα F_n είναι συγκεκριμένα σύνολα αποτελούμενα από πεπερασμένου πλήθους διαστήματα. Τέλος, αποδείξτε ότι

   (i) το A δεν περιέχει ανοικτά διαστήματα,

   (ii) το A είναι υπεραριθμήσιμο και

   (iii) το A είναι μηδενικού μέτρου.

6. Έστω πραγματική συνάρτηση f. Αποδείξτε ότι $f^+ f^- = 0$ και $f^n = (f^+)^n + (f^-)^n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

   Επίσης, αν $f = g - h$ και $g, h \geq 0$ στο πεδίο ορισμού της f, αποδείξτε ότι $f^+ \leq g$ και $f^- \leq h$ στο πεδίο ορισμού της f.

7. Για οποιεσδήποτε ολοκληρώσιμες συναρτήσεις f, g ορίζουμε $f \sim g$ αν $f = g$ σ.π.

   Αποδείξτε ότι η σχέση $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας στη συλλογή των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων.

   Αν $f_1 \sim g_1$ και $f_2 \sim g_2$, αποδείξτε ότι

$$f_1 + f_2 \sim g_1 + g_2, \qquad f_1 f_2 \sim g_1 g_2, \qquad \lambda f_1 \sim \lambda f_2,$$

$$\max\{f_1, f_2\} \sim \max\{g_1, g_2\}, \qquad \min\{f_1, f_2\} \sim \min\{g_1, g_2\}.$$

   Αν $f_1 \sim g_1$ και $f_2 \sim g_2$ και $f_1 \leq f_2$ σ.π. αποδείξτε ότι $g_1 \leq g_2$ σ.π.

   Έστω $f_n \sim g_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν οι f, g είναι ολοκληρώσιμες και $f_n \to f$ σ.π. και $g_n \to g$ σ.π. αποδείξτε ότι $f \sim g$.

8. Έστω ανοικτό διάστημα I και συνεχείς $f, g : I \to \mathbb{R}$. Αν $f = g$ σ.π. στο I, αποδείξτε ότι $f = g$ στο I.

   (Υπόδειξη: Έστω $f(x_0) \neq g(x_0)$ για κάποιο $x_0 \in I$. Τότε υπάρχει ανοικτό διάστημα $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq I$ ώστε $f(x) \neq g(x)$ για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Δείτε και την άσκηση 3.)

   Έστω ανοικτό διάστημα I και συνεχείς $f, g : I \to \mathbb{R}$. Αν $f \leq g$ σ.π. στο I, αποδείξτε ότι $f \leq g$ στο I.

9. Αποδείξτε ότι $\chi_{A\cap B} = \chi_A \chi_B$, $\chi_{A\cup B} + \chi_{A\cap B} = \chi_A + \chi_B$ και $\chi_{\mathbb{R}\setminus A} = 1 - \chi_A$.

10. Θεωρήστε την κλιμακωτή συνάρτηση ϕ η οποία μηδενίζεται έξω από το διάστημα $[-3, 7)$, είναι σταθερή 3 στο $(-3, -1]$, σταθερή -1 στο $(-1, 2)$, σταθερή 2 στο $(2, 4)$, σταθερή -3 στο $(4, 7)$ και έχει τιμή 5 στο -3, τιμή -8 στο 2 και τιμή -1 στο 4. Υπολογίστε το $\int_{\mathbb{R}} \phi$.

    Βρείτε όσο το δυνατό λιγότερους αριθμούς $c_1, \ldots, c_n$ και αντίστοιχα διαστήματα $I_1, \ldots, I_n$ ώστε να ισχύει $\phi = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{I_k}$ (παντού).

    Βρείτε όσο το δυνατό λιγότερους αριθμούς $d_1, \ldots, d_m$ και αντίστοιχα διαστήματα $J_1, \ldots, J_m$ ώστε να ισχύει $\phi = \sum_{k=1}^{m} d_k \chi_{J_k}$ σ.π.

    Περιγράψτε τις κλιμακωτές συναρτήσεις ϕ^+, ϕ^- και $|\phi|$.

    Θεωρήστε και την κλιμακωτή συνάρτηση ψ η οποία μηδενίζεται έξω από το $(-2, 8)$, είναι σταθερή 1 στο $(-2, 3]$ και σταθερή -2 στο $(3, 8)$. Υπολογίστε το $\int_{\mathbb{R}} \psi$.

    Περιγράψτε τις κλιμακωτές συναρτήσεις $\phi + \psi$, $\phi\psi$, $\max\{\phi, \psi\}$ και $\min\{\phi, \psi\}$.

11. Θεωρήστε τις κλιμακωτές συναρτήσεις $\phi_n = n\chi_{(0,\frac{1}{n})}$. Αποδείξτε ότι $\phi_n \to 0$ (παντού) και ότι $\int_{\mathbb{R}} \phi_n = 1$, οπότε $\int_{\mathbb{R}} \phi_n \not\to 0$. Αντιφάσκει αυτό με το Λήμμα Α;

    Θεωρήστε τις κλιμακωτές συναρτήσεις $\phi_n = \chi_{(0,1+\frac{1}{n})}$. Αποδείξτε ότι $0 \leq \phi_{n+1} \leq \phi_n$ (παντού) και ότι $\int_{\mathbb{R}} \phi_n = 1 + \frac{1}{n}$, οπότε $\int_{\mathbb{R}} \phi_n \not\to 0$. Αντιφάσκει αυτό με το Λήμμα Α;

    Θεωρήστε τις κλιμακωτές συναρτήσεις $\phi_n = n\chi_{(0,1+\frac{1}{n})}$. Αποδείξτε ότι $\phi_n \leq \phi_{n+1}$ (παντού) και ότι $\phi_n(x) \to +\infty$ για κάθε $x \in (0, 1]$. Αντιφάσκει αυτό με το Λήμμα Β;

12. Θεωρήστε τις κλιμακωτές συναρτήσεις $\chi_n = \frac{1}{n}\chi_{[0,\frac{1}{n}]}$ και, κατόπιν, τις κλιμακωτές συναρτήσεις $\phi_n = \chi_1 + \cdots + \chi_n$.

    Περιγράψτε κάθε ϕ_n.

    Αποδείξτε ότι $\phi_n \leq \phi_{n+1}$ (παντού) και ότι $\int_{\mathbb{R}} \phi_n \leq M$ για κάποιον αριθμό M.

    Περιγράψτε τη συνάρτηση f που ανήκει στη συλλογή $\mathcal{C}_1$ και ορίζεται από την ακολουθία (ϕ_n). Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της f;

    Τι σχέση έχει το $\int_{\mathbb{R}} f$ με το άθροισμα της σειράς $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$;

13. Να επαναλάβετε την προηγούμενη άσκηση ξεκινώντας με τις κλιμακωτές συναρτήσεις $\chi_n = \frac{1}{n}\chi_{(0,\frac{1}{n}]}$.

    Είναι η αντίστοιχη οριακή συνάρτηση f (η οποία, θα διαπιστώσετε, ορίζεται παντού στο $\mathbb{R}$) Riemann ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[0, 1]$;

14. Σε ποιες από τις παρακάτω περιπτώσεις είναι η f ολοκληρώσιμη στο αντίστοιχο διάστημα I; Σε αυτές τις περιπτώσεις υπολογίστε το αντίστοιχο $\int_I f$.

$$f(x) = x^2 \quad I = [0,1],$$

$$f(x) = \tfrac{1}{x} \quad I = (0,1], \qquad f(x) = \tfrac{1}{x} \quad I = [1,+\infty), \qquad f(x) = \tfrac{1}{x} \quad I = (0,+\infty),$$

$$f(x) = \tfrac{1}{\sqrt{x}} \quad I = (0,1], \qquad f(x) = \tfrac{1}{\sqrt{x}} \quad I = [1,+\infty), \qquad f(x) = \tfrac{1}{\sqrt{x}} \quad I = (0,+\infty),$$

$$f(x) = \tfrac{1}{x^2} \quad I = (0,1], \qquad f(x) = \tfrac{1}{x^2} \quad I = [1,+\infty), \qquad f(x) = \tfrac{1}{x^2} \quad I = (0,+\infty),$$

$$f(x) = \tfrac{1}{x} \quad I = (-1,1), \qquad f(x) = \tfrac{1}{\sqrt{|x|}} \quad I = (-1,1),$$

$$f(x) = x^2 e^{-x} \quad I = [1,+\infty), \qquad f(x) = x e^{-x^2} \quad I = [1,+\infty), \qquad f(x) = |x| e^{-x^2} \quad I = \mathbb{R}.$$

15. Για ποιες τιμές του p είναι ολοκληρώσιμη η συνάρτηση x^{-p} στο $(0,1]$; στο $[1,+\infty)$; στο $(0,+\infty)$;

    Αποδείξτε ότι η $f(x) = \frac{d}{dx}\big(x^2 \sin\frac{1}{x^2}\big)$ δεν είναι ολοκληρώσιμη στο $(0,1)$.

    Αν $p > -1$, αποδείξτε ότι η $f(x) = x^p e^{-x}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $(0,+\infty)$. (Να διακρίνετε τις περιπτώσεις: $p \geq 0$ και $-1 < p < 0$.)

16. Έστω φραγμένο διάστημα I, αριθμοί m, M και ολοκληρώσιμη f στο I ώστε $m \leq f \leq M$ σ.π. στο I.

    Αποδείξτε ότι $ml(I) \leq \int_I f \leq Ml(I)$.

    Αποδείξτε ότι η αριστερή ανισότητα ισχύει ως ισότητα αν και μόνο αν $f = m$ σ.π. στο I. Ομοίως, για την δεξιά ανισότητα.

17. **Ανισότητα του Chebyshev.** Έστω ολοκληρώσιμη f ώστε $f \geq 0$ σ.π. και διάστημα I. Αν $f(x) \geq \lambda > 0$ για σ.κ. $x \in I$, αποδείξτε ότι

    $$l(I) \leq \tfrac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{R}} f.$$

    (Υπόδειξη: $f \geq \chi_I$ σ.π.)

18. **Θεώρημα Φραγμένης Σύγκλισης**. Έστω *φραγμένο* διάστημα I, αριθμός $M \geq 0$ και συναρτήσεις f_n ολοκληρώσιμες στο I ώστε $|f_n| \leq M$ σ.π. στο I. Αν $f_n \to f$ σ.π. στο I, αποδείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο I και $\int_I f_n \to \int_I f$.

    (Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης με κατάλληλη F.)

19. **Θεώρημα Ομοιόμορφης Σύγκλισης**. Έστω *φραγμένο* διάστημα I και συναρτήσεις f και f_n ολοκληρώσιμες στο I ώστε $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο I. Αποδείξτε ότι $\int_I |f_n - f| \to 0$.

    (Υπόδειξη: Αν $M_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in A\}$, τότε $M_n \to 0$.)

20. Έστω συνάρτηση f ορισμένη σ.π. στο $\mathbb{R}$. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f_n = \chi_{[-n,n]} f$. Αποδείξτε ότι κάθε f_n είναι ορισμένη σ.π. στο $\mathbb{R}$, ότι $|f_n| \leq |f|$ σ.π. και ότι $f_n \to f$ σ.π.

    Αν η f είναι ολοκληρώσιμη, αποδείξτε ότι κάθε f_n είναι ολοκληρώσιμη (ή, ισοδύναμα, ότι η f είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε $[-n,n]$) και ότι $\int_{[-n,n]} f = \int_{\mathbb{R}} f_n \to \int_{\mathbb{R}} f$.

    Αντιστρόφως, αν κάθε f_n είναι ολοκληρώσιμη (ή, ισοδύναμα, η f είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε $[-n,n]$) και $\int_{[-n,n]} |f| \leq M$ για κάποιον αριθμό M, αποδείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη και $\int_{[-n,n]} f \to \int_{\mathbb{R}} f$.

21. Έστω ολοκληρώσιμη f και αριθμός M. Αν η g είναι συνεχής ή, γενικότερα, η g είναι τμηματικά συνεχής σε κάθε $[-n,n]$ ή, ακόμη γενικότερα, η g είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε $[-n,n]$ και αν $|g| \leq M$ σ.π., αποδείξτε ότι η fg είναι ολοκληρώσιμη και $|\int_{\mathbb{R}} fg| \leq M \int_{\mathbb{R}} |f|$.

22. Έστω διάστημα I και ολοκληρώσιμη f στο I ώστε $f \geq 0$ σ.π. στο I. Θεωρήστε τις συναρτήσεις $f_n = \min\{f, n\}$ και αποδείξτε ότι κάθε f_n είναι ολοκληρώσιμη και ότι $\int_I f_n \to \int_I f$.

23. Έστω διάστημα I και ολοκληρώσιμη f στο I. Θεωρήστε τις συναρτήσεις $f_n = \max\big\{\min\{f, n\}, -n\big\}$ και αποδείξτε ότι κάθε f_n είναι ολοκληρώσιμη και ότι $\int_I f_n \to \int_I f$.

24. Έστω $p > 0$. Αποδείξτε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι ολοκληρώσιμες στο $[0, +\infty)$ και υπολογίστε τα αντίστοιχα $\int_{[0,+\infty)} f$.

$$f = \sum_{k=1}^{+\infty} \tfrac{1}{2^k}\chi_{[k-1,k)}, \qquad f = \sum_{k=1}^{+\infty} \tfrac{1}{k^{p+1}}\chi_{[k-1,k)}, \qquad f = \sum_{k=1}^{+\infty} \tfrac{1}{k^p}\chi_{(\frac{1}{k+1},\frac{1}{k}]}.$$

25. Είναι οι παρακάτω συναρτήσεις ολοκληρώσιμες στο $[\pi, +\infty)$; στο $(0, +\infty)$;

$$f(x) = \tfrac{\sin x}{x^2}, \qquad f(x) = \tfrac{\sin x}{x}. \qquad f(x) = \tfrac{1-\cos x}{x^2}.$$

(Υπόδειξη: Για την πρώτη, $|\frac{\sin x}{x^2}| \leq \frac{1}{x^2}$. Για τη δεύτερη, $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\frac{\sin x}{x}|\, dx \geq \frac{1}{(n+1)\pi}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin x|\, dx = \frac{2}{(n+1)\pi}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Για την τρίτη, $\lim_{x\to 0+} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.)

26. Έστω $f_n(x) = e^{-nx} - 2e^{-2nx}$. Αποδείξτε ότι $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_{[0,+\infty)} f_n \neq \int_{[0,+\infty)} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$. Αντιφάσκει αυτό με το Θεώρημα Σύγκλισης Σειράς;

27. Αποδείξτε ότι

$$\int_{(0,1)} \log \tfrac{1}{1-x}\, dx = \int_{(0,1)} \big(\sum_{n=1}^{+\infty} \tfrac{x^n}{n}\big)\, dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \tfrac{1}{n}\int_{(0,1)} x^n\, dx = 1.$$

28. Αν $p > 0$, αποδείξτε ότι

$$\int_{(0,1)} \tfrac{x^{p-1}}{1-x} \log \tfrac{1}{x}\, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \tfrac{1}{(n+p)^2}.$$

(Υπόδειξη: $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ για $x \in (0,1)$.)

29. Αν $p > -1$, αποδείξτε ότι

$$\int_{(0,n)} \big(1 - \tfrac{x}{n}\big)^n x^p\, dx \to \int_{(0,+\infty)} e^{-x}x^p\, dx.$$

30. Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $(0,1)$, αποδείξτε ότι

$$\int_{(0,1)} x^n f(x)\, dx \to 0.$$