Δεύτερο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Έστω f ολοκληρώσιμη (μιγαδική) συνάρτηση στο διάστημα I. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του ολοκληρώματος μιγαδικής συνάρτησης, αποδείξτε ότι η $\overline{f}$ είναι ολοκληρώσιμη στο I και
$$\int_I \overline{f(x)}\, dx = \overline{\int_I f(x)\, dx}.$$

2. Έστω αριθμός M και g η οποία είναι συνεχής ή, γενικότερα, τμηματικά συνεχής σε κάθε $[-n, n]$ ή, ακόμη γενικότερα, ολοκληρώσιμη σε κάθε $[-n, n]$ και έστω ότι $|g| \leq M$ σ.π. Χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα της άσκησης 21 του πρώτου φυλλαδίου και αποδείξτε ότι η συνάρτηση $l_g : L^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ με τύπο
$$l_g(f) = \int_{\mathbb{R}} fg$$
είναι ένα συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές στον $L^1(\mathbb{R})$. Αποδείξτε, επίσης, ότι $|l_g(f)| \leq M\|f\|_1$ για κάθε $f \in L^1(I)$. Τέλος, αποδείξτε ότι, αν $g \geq 0$ σ.π., τότε το l_g είναι θετικό γραμμικό συναρτησοειδές.

3. Θεωρήστε ένα διάστημα $I = [a, b]$, τη χαρακτηριστική συνάρτηση χ_I, τις συναρτήσεις ϕ_t που έχουμε συναντήσει στη θεωρία και περιορίστε την παράμετρο t ώστε $0 < t < \frac{b-a}{2}$. Αποδείξτε ότι
(i) $(\chi_I * \phi_t)(x) = 1$ για $a + t \leq x \leq b - t$ και
(ii) $(\chi_I * \phi_t)(x) = 0$ για $x \leq a - t$ και για $b + t \leq x$.
Ποιά είναι η μονοτονία της $\chi_I * \phi_t$ στα ενδιάμεσα διαστήματα $[a - t, a + t]$ και $[b - t, b + t]$; Αποδείξτε τον ισχυρισμό σας.
Σχεδιάστε την $\chi_I * \phi_t$ όσο πιστότερα μπορείτε, λαμβάνοντας υπόψη ότι η $\chi_I * \phi_t$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη.

4. Αποδείξτε ότι η μεταθετική άλγεβρα $L^1(\mathbb{R})$ δεν έχει μοναδιαίο στοιχείο, ακολουθώντας και αιτιολογώντας πολύ προσεκτικά τα παρακάτω βήματα.
Υποθέτουμε (για να καταλήξουμε σε άτοπο) ότι η συνάρτηση f είναι μοναδιαίο στοιχείο της συνέλιξης στον $L^1(\mathbb{R})$. Δηλαδή $f * g = g$ για κάθε $g \in L^1(\mathbb{R})$.
Τότε για τις συναρτήσεις ϕ_t που είδαμε στη θεωρία ισχύει $\phi_t = f * \phi_t \to f$ στην $L^1(\mathbb{R})$ όταν $t \to 0+$.
Έστω τυχών αριθμός $a > 0$ και το σύνολο $(-\infty, -a] \cup [a, +\infty)$. Τότε
$$\int_{(-\infty,-a]\cup[a,+\infty)} |f * \phi_t - f| \leq \int_{\mathbb{R}} |f * \phi_t - f| \to 0 \qquad \text{όταν } t \to 0+$$
οπότε
$$\int_{(-\infty,-a]\cup[a,+\infty)} |f - \phi_t| \to 0 \qquad \text{όταν } t \to 0+ .$$
Αν $0 < t < a$, τότε η ϕ_t μηδενίζεται στο $(-\infty, -a] \cup [a, +\infty)$, οπότε
$$\int_{(-\infty,-a]\cup[a,+\infty)} |f| = 0.$$
Άρα $f = 0$ σ.π. στο $(-\infty, -a] \cup [a, +\infty)$.
Εφαρμόζοντας το τελευταίο συμπέρασμα για $a = \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, συμπεραίνουμε ότι $f = 0$ σ.π. στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Άρα $f = 0$ σ.π. στο $\mathbb{R}$.
Άρα $g = f * g = 0 * g = 0$ για κάθε $g \in L^1(\mathbb{R})$. Άτοπο!

5. Ποιές είναι οι 1-περιοδικές επεκτάσεις των παρακάτω συναρτήσεων από το αρχικό διάστημα ορισμού τους στο $\mathbb{R}$; Σχεδιάστε τα γραφήματα αυτών των επεκτάσεων.
[α] $f(x) = x$ στο διάστημα $[0, 1)$.
[β] $f(x) = x$ στο διάστημα $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.
[γ] $f(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ x - 1, & \text{αν } \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$ στο διάστημα $[0, 1)$.

[δ] $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } 0 \le x < \frac{1}{2} \\ -1, & \text{αν } \frac{1}{2} \le x < 1 \end{cases}$ στο διάστημα $[0, 1)$.
Τι σχέση έχει η 1-περιοδική επέκταση της συνάρτησης στο [α] με τη συνάρτηση $x - [x]$;
Πώς σχετίζονται μεταξύ τους οι 1-περιοδικές επεκτάσεις των συναρτήσεων στα [β] και [γ];

6. Θα λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι **άρτια** αν ισχύει $f(-x) = f(x)$ για σ.κ. x. Ομοίως, θα λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι **περιττή** αν ισχύει $f(-x) = -f(x)$ για σ.κ. x.
Έστω f ορισμένη σ.π. στο $[0, \frac{1}{2})$.
[α] Πώς επεκτείνεται η f σε 1-περιοδική συνάρτηση η οποία να είναι άρτια;
[β] Πώς επεκτείνεται η f σε 1-περιοδική συνάρτηση η οποία να είναι περιττή;
[γ] Σχεδιάστε τα γραφήματα των 1-περιοδικών άρτιων και περιττών επεκτάσεων των $\sin x$, $\cos x$ από το διάστημα $[0, \frac{1}{2})$ στο $\mathbb{R}$. Τι σχέση έχουν αυτές οι τέσσερις συναρτήσεις με τις αρχικές $\sin x$, $\cos x$ ορισμένες στο $\mathbb{R}$;

7. [α] Έστω εκθετικό πολυώνυμο $f(x) = \sum_{k=m}^{n} a_k e_k(x) = \sum_{k=m}^{n} a_k e^{2\pi i k x}$. Αποδείξτε ότι
$$a_k = \int_{[0,1)} f\overline{e_k} = \int_{[0,1)} f(x) e^{-2\pi i k x}\, dx.$$
Με αυτούς τους τύπους μπορούμε να βρούμε τους συντελεστές a_k ενός εκθετικού πολυωνύμου f αν γνωρίζουμε τον τύπο του.
[β] Εφαρμόστε τους προηγούμενους τύπους για να γράψετε τις συναρτήσεις $f(x) = \sin^2 2\pi x$, $f(x) = \cos^2 2\pi x$, $f(x) = \sin^3 2\pi x$ και $f(x) = \cos^3 2\pi x$ στη μορφή εκθετικών πολυωνύμων, αν γνωρίζετε εκ των προτέρων ότι αυτές οι συναρτήσεις *είναι* εκθετικά πολυώνυμα.

8. Θεωρήστε τη συνάρτηση $P(x) = \frac{1}{\pi(x^2+1)}$ και τις συναρτήσεις
$$P_t(x) = \tfrac{1}{t} P(\tfrac{x}{t}) = \tfrac{t}{\pi(x^2+t^2)} \qquad \text{για } t > 0.$$
[α] Αποδείξτε ότι κάθε P_t είναι θετική, άρτια, άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και
$$\int_{\mathbb{R}} P_t(x)\, dx = 1 \qquad \text{για κάθε } t > 0.$$
[β] Αποδείξτε ότι, αν $f \in L^1(\mathbb{R})$, τότε για κάθε $t > 0$ ισχύει $f * P_t \in L^1(\mathbb{R})$, η $f * P_t$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και
$$\|f * P_t - f\|_1 \to 0 \qquad \text{όταν } t \to 0+.$$
[γ] Αποδείξτε ότι
$$P_t * P_s = P_{t+s} \qquad \text{για κάθε } t, s > 0.$$

9. Θεωρήστε τη συνάρτηση $G(x) = e^{-\pi x^2}$ και τις συναρτήσεις
$$G_t(x) = \tfrac{1}{t} G(\tfrac{x}{t}) = \tfrac{1}{t} e^{-\frac{\pi}{t^2} x^2} \qquad \text{για } t > 0.$$
[α] Αποδείξτε ότι κάθε G_t είναι θετική, άρτια, άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και
$$\int_{\mathbb{R}} G_t(x)\, dx = 1 \qquad \text{για κάθε } t > 0.$$
[β] Αποδείξτε ότι, αν $f \in L^1(\mathbb{R})$, τότε για κάθε $t > 0$ ισχύει $f * G_t \in L^1(\mathbb{R})$, η $f * G_t$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και
$$\|f * G_t - f\|_1 \to 0 \qquad \text{όταν } t \to 0+.$$
[γ] Αποδείξτε ότι
$$G_t * G_s = G_{\sqrt{t^2+s^2}} \qquad \text{για κάθε } t, s > 0.$$