## Τρίτο φυλλάδιο ασκήσεων.

*Πιστεύω ότι όλοι πρέπει να δοκιμάσετε τις ασκήσεις 1, 2, 4, 5, 6, 7, 11 και 12[α,β,γ]. Θεωρώ ότι είναι σχετικά απλές εφαρμογές της θεωρίας. Μπορείτε να προσπαθήσετε και την 9. Οι υπόλοιπες ασκήσεις είναι λίγο πιο εξεζητημένες.*

1. Έστω $0 < a < \frac{1}{2}$. Θεωρήστε τη σειρά Fourier της 1-περιοδικής συνάρτησης με τύπο

   $$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } |x| < a \\ 0, & \text{αν } a < |x| < \frac{1}{2} \end{cases}$$

   και, εφαρμόζοντας το Θεώρημα 2.4, υπολογίστε το άθροισμα

   $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2\pi nx)}{n} \qquad \text{για κάθε } \ x.$$

   Συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$ η σειρά Fourier της $f$;

2. Έστω $t \neq 0$. Θεωρήστε τη σειρά Fourier της 1-περιοδικής συνάρτησης με τύπο

   $$f(x) = e^{2\pi tx} \qquad \text{για } \ -\tfrac{1}{2} < x < \tfrac{1}{2}$$

   και, εφαρμόζοντας το Θεώρημα 2.4, αποδείξτε ότι

   $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{t^2+n^2} = \frac{\pi}{2t}\,\frac{e^{\pi t}+e^{-\pi t}}{e^{\pi t}-e^{-\pi t}} - \frac{1}{2t^2}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{t^2+n^2} = \frac{2\pi t - (e^{\pi t}-e^{-\pi t})}{2t^2(e^{\pi t}-e^{-\pi t})}.$$

   Συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$ η σειρά Fourier της $f$;

3. Έστω 1-περιοδική $f$ στον $L^1([0,1))$. Θεωρήστε την συνάρτηση

   $$F(x) = \int_{[0,x]} f(t)\,dt \qquad \text{για } \ x \in \mathbb{R}.$$

   Αν $\widehat{f}(0) = 0$, τότε:
   [α] Αποδείξτε ότι η $F$ είναι 1-περιοδική και συνεχής.
   [β] Βρείτε τους συντελεστές Fourier της $F$ συναρτήσει των συντελεστών Fourier της $f$.

4. Θεωρήστε τις 1-περιοδικές συναρτήσεις με τύπους $x$, $x^2$ και $x^3 - \frac{x}{4}$ στο διάστημα $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Βρείτε τις σειρές Fourier των τριών συναρτήσεων.
   [α] Πώς σχετίζονται οι τρεις αυτές σειρές; Ποιά ανάλογη σχέση υπάρχει ανάμεσα στις τρεις συναρτήσεις;
   [β] Ποιές από τις τρεις σειρές συγκλίνουν ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$;
   [γ] Χρησιμοποιήστε κατάλληλα αυτές τις σειρές σε συνδυασμό με το Θεώρημα 2.4 για να υπολογίσετε τα αθροίσματα

   $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}, \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)^3}.$$

5. Θεωρήστε την συνάρτηση με τύπο $f(x) = x$ για $0 < x < \frac{1}{2}$.
   [α] Πώς θα αναπτύξετε την $f$ ως σειρά ημιτόνων

   $$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(2\pi nx)$$

στο διάστημα $(0, \frac{1}{2})$; Σκεφτείτε ότι, αν γίνει κάτι τέτοιο, τότε η $f$ θα έχει μια συγκεκριμένη περιοδικότητα (ποιά;) και ότι θα έχει ένα επιπλέον χαρακτηριστικό (ποιό;) ως συνάρτηση.
[β] Πώς θα αναπτύξετε την $f$ ως σειρά συνημιτόνων

$$a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(2\pi n x)$$

στο διάστημα $(0, \frac{1}{2})$;

6. Έχουμε αποδείξει τον τύπο

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\sin((2n+1)\pi x)}{\sin(\pi x)}\,dx = 1 \qquad \text{για κάθε } n \in \mathbb{Z}, n \geq 0.$$

Θεωρήστε την 1-περιοδική συνάρτηση με τύπο

$$f(x) = \frac{1}{\sin(\pi x)} - \frac{1}{\pi x} \qquad \text{για } 0 < |x| < \frac{1}{2}.$$

[α] Αποδείξτε ότι η $f$ μπορεί να θεωρηθεί συνεχής στο $0$ και, επομένως, φραγμένη και, επομένως, ολοκληρώσιμη στο $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.
[β] Γράψτε

$$\sin((2n+1)\pi x) = \frac{1}{2i} e^{i\pi x} e^{2\pi i n x} - \frac{1}{2i} e^{-i\pi x} e^{-2\pi i n x}$$

και εφαρμόστε το Λήμμα των Riemann - Lebesgue για να αποδείξετε ότι

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) \sin((2n+1)\pi x)\,dx \to 0 \qquad \text{όταν } n \to +\infty.$$

[γ] Αποδείξτε ότι

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin((2n+1)\pi x)}{x}\,dx \to \frac{\pi}{2} \qquad \text{όταν } n \to +\infty.$$

[δ] Αποδείξτε ότι

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

7. [α] Θεωρήστε την 1-περιοδική συνάρτηση με τύπο $x^2$ στο διάστημα $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ και, μέσω της σειράς Fourier της, υπολογίστε το

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}.$$

[β] Υπολογίστε τα

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^8}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{10}}.$$

8. [α] Αν οι $f, g$ είναι 1-περιοδικές και $f, g \in L^2([0,1))$, αποδείξτε ότι ορίζεται η συνέλιξη

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y) g(y)\,dy \qquad \text{για } \textbf{κάθε } x$$

και ότι η $f * g$ είναι 1-περιοδική και συνεχής στο $\mathbb{R}$.
[β] Αποδείξτε ότι μια 1-περιοδική συνάρτηση $h$ συνεχής στο $\mathbb{R}$ έχει απολύτως αθροίσιμη σειρά Fourier αν και μόνο αν είναι συνέλιξη δυο 1-περιοδικών συναρτήσεων στον $L^2([0,1))$.

9. Έστω
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2 < +\infty.$$
Αν
$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{2\pi ikx} = 0 \qquad \text{για σ.κ. } x,$$
αποδείξτε ότι $a_n = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

10. Έστω 1-περιοδική $f \in L^1([0,1))$.
[α] Αν $k \in \mathbb{N}$ και
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|^k |\widehat{f}(n)| < +\infty,$$
αποδείξτε ότι η $f$ είναι σ.π. ίση με μια συνάρτηση η οποία είναι $k$ φορές συνεχώς παραγωγίσιμη.
Αντιστρόφως, αν η $f$ είναι σ.π. ίση με μια συνάρτηση η οποία είναι $k$ φορές συνεχώς παραγωγίσιμη, αποδείξτε ότι
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|^{k-2} |\widehat{f}(n)| < +\infty.$$
Μπορείτε, στην τελευταία σχέση, το $k-2$ να το κάνετε $k-1$;
[β] Αποδείξτε ότι η $f$ είναι σ.π. ίση με μια συνάρτηση η οποία είναι άπειρες φορές συνεχώς παραγωγίσιμη αν και μόνο αν
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|^k |\widehat{f}(n)| < +\infty \qquad \text{για κάθε } k \geq 1.$$

11. Έστω $n \in \mathbb{N}$. Υπολογίστε τους αριθμούς $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ ώστε η παράσταση
$$\int_0^{\frac{1}{2}} \big|a_0 + a_1\cos(2\pi x) + \cdots + a_{n-1}\cos(2\pi(n-1)x) - \cos^n(2\pi x)\big|^2\, dx$$
να έχει την ελάχιστη δυνατή τιμή.

12. Για κάθε $r$ με $0 \leq r < 1$ θεωρούμε τη σειρά
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|} e^{inx}.$$
[α] Αποδείξτε ότι η σειρά συγκλίνει απολύτως και ορίζει μια $2\pi$-περιοδική συνάρτηση.
[β] Αποδείξτε ότι
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|} e^{in\theta} = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\theta} \qquad \text{για } 0 \leq r < 1, \theta \in \mathbb{R}.$$
Συμβολίζουμε
$$P_r(\theta) = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\theta}$$
και το σύνολο των συναρτήσεων $\{P_r \mid 0 \leq r < 1\}$ το ονομάζουμε **πυρήνα του Poisson**.
[γ] Αποδείξτε ότι, για κάθε $r$ με $0 \leq r < 1$,
$$\widehat{P_r}(n) \overset{\text{ορ}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta) e^{-in\theta}\, d\theta = r^{|n|} \qquad \text{για κάθε } n \in \mathbb{Z}.$$
(Μην επιχειρήσετε να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα!).
[δ] Παρατηρήστε ότι κάθε $P_r$ είναι συνεχής, άρτια, μη-αρνητική, φθίνουσα στο $[0,\pi]$ και ότι
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta)\, d\theta = 1.$$

Επίσης

$$0 \leq P_r(\theta) \leq \frac{1-r}{(1-r)^2 + \frac{2}{\pi^2}\theta^2} \qquad \text{για } \frac{1}{2} \leq r < 1, \theta \in \mathbb{R}.$$

[ε] Αποδείξτε ότι για κάθε $2\pi$-περιοδική συνάρτηση $f$ ολοκληρώσιμη στο $(-\pi, \pi]$ ισχύει

$$f * P_r \to f \qquad \text{στον } L^1((-\pi,\pi]) \text{ όταν } r \to 1- .$$

[στ] Αποδείξτε ότι η

$$g(r,\theta) \stackrel{\text{ορ}}{=} (f * P_r)(\theta)$$

είναι αρμονική στον μοναδιαίο δίσκο $\{re^{i\theta} \mid 0 \leq r < 1\}$.
[ζ] Αν η $f$ είναι συνεχής σε κάποιον $\theta_0$, αποδείξτε ότι

$$(f * P_r)(\theta_0) \to f(\theta_0) \qquad \text{όταν } r \to 1- .$$

13. Έστω $f$ ορισμένη και συνεχώς παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0, \frac{1}{2}]$ με $f(0) = f(\frac{1}{2}) = 0$. Αποδείξτε ότι

$$\int_0^{\frac{1}{2}} |f'(x)|^2\, dx \geq 4\pi^2 \int_0^{\frac{1}{2}} |f(x)|^2\, dx. \qquad \text{(Ανισότητα του Wirtinger)}$$

Για ποιές συναρτήσεις $f$ ισχύει η ισότητα;

14. [α] Θεωρήστε, για $t > 0$, την συνάρτηση

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-\frac{1}{2t}(x-k)^2}.$$

Αποδείξτε ότι η σειρά που ορίζει την $f$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$ και ότι η $f$ είναι συνεχής και 1-περιοδική.
Αποδείξτε ότι η σειρά Fourier της $f$ είναι η

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \sqrt{2\pi t}\, e^{-2\pi^2 n^2 t} e^{2\pi i n x}.$$

Αποδείξτε ότι η σειρά Fourier της $f$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην $f$.
[β] Θεωρήστε την **θήτα-συνάρτηση**

$$\theta(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 t} \qquad \text{για } t > 0.$$

Αποδείξτε ότι

$$\theta(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\theta\Big(\frac{1}{t}\Big). \qquad \text{(Τύπος του Jacobi)}$$