Τέταρτο φυλλάδιο ασκήσεων.

Δοκιμάστε τις ασκήσεις 1 - 14. Πρέπει να μπορείτε να τις λύσετε "σχετικά εύκολα".

1. Βρείτε τον μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης

$$x\chi_{[-1,1]}(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{αν } x < -1 \text{ ή } 1 < x \end{cases}$$

2. Έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$ ώστε $\widehat{f}(\xi) = e^{-\xi^4}$ για κάθε ξ. Χωρίς να βρείτε την f, βρείτε τους μετασχηματισμούς Fourier των συναρτήσεων $f(2x)$, $f(2x-1)$, $f(2x-1)e^{-2\pi i x}$.

3. Βρείτε τους μετασχηματισμούς Fourier των συναρτήσεων xe^{-x^2}, $e^{-\pi x^2 + 2\pi x}$.

4. Βρείτε $f \in L^1(\mathbb{R})$ ώστε $\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\pi^2} \frac{1}{(\xi^2+1)^2}$ για κάθε ξ.

5. Αποδείξτε τις ισότητες στις ασκήσεις 8[γ] και 9[γ] του δεύτερου φυλλαδίου παίρνοντας τον μετασχηματισμό Fourier των δυο πλευρών τους.

6. Έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$, αριθμός a και η συνάρτηση $g(x) = f(x+a) - f(x)$. Αποδείξτε ότι ο $\widehat{g}$ έχει άπειρες ρίζες.

7. Θεωρήστε, για $t > 0$, την συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{αν } x > 0 \\ 0, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$$

[α] Δείτε ότι $f \in L^1(\mathbb{R})$, υπολογίστε την $\widehat{f}$ και αποδείξτε ότι $\widehat{f} \notin L^1(\mathbb{R})$.
[β] Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 3.15, υπολογίστε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τον μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης $x^n f(x)$.
[γ] Δείτε ότι

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{-x}, & \text{αν } x > 0 \\ 0, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$$

και υπολογίστε τον μετασχηματισμό Fourier της f'. Συμφωνεί αυτό που βρήκατε με το αποτέλεσμα $2\pi i\xi \widehat{f}(\xi) = \widehat{f'}(\xi)$ που προβλέπει η Πρόταση 3.11; Γιατί;

8. Από την συνάρτηση με τύπο

$$\begin{cases} 1 - |\xi|, & \text{αν } |\xi| \leq 1 \\ 0, & \text{αν } |\xi| \geq 1 \end{cases}$$

υπολογίστε το

$$\int_0^{+\infty} \Big(\frac{\sin x}{x}\Big)^4 \, dx.$$

9. Υπολογίστε το

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x}{x} \frac{e^{i\xi x}}{1+x^2} \, dx.$$

10. Έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$ η οποία παρουσιάζει άλμα σε κάποιο σημείο x_0. Δηλαδή, υπάρχουν τα πλευρικά όρια της f στο x_0 και είναι διαφορετικά. Είναι δυνατόν να ισχύει $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$;

11. Υπάρχει $f \in L^1(\mathbb{R})$, $f \neq 0$ ώστε $f * f = f$;

12. [α] Το Λήμμα 3.1 λέει ότι ο μετασχηματισμός Fourier της $\chi_{[-\eta,\eta]}$, η οποία είναι στον $L^1(\mathbb{R})$, είναι η συνάρτηση D_η. Παρατηρήστε ότι η D_η ανήκει στον $L^2(\mathbb{R})$ αλλά όχι στον $L^1(\mathbb{R})$. (Αποδεχτείτε αυτό το τελευταίο. Αναφέρεται στην θεωρία.)
Βρείτε τον μετασχηματισμό Fourier της D_η.
[β] Χωρίς να υπολογίσετε κατ' ευθείαν το γενικευμένο ολοκλήρωμα, αποδείξτε ότι
$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(2\pi x)}{x} e^{-2\pi|x|}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

13. Βρείτε λύσεις $f \in L^1(\mathbb{R})$ των παρακάτω ολοκληρωτικών εξισώσεων, παίρνοντας μετασχηματισμούς Fourier των δυο πλευρών κάθε εξίσωσης.
$$\int_{\mathbb{R}} f(x-y)e^{-|y|}\, dy = \frac{4}{3}e^{-|x|} - \frac{2}{3}e^{-2|x|}, \qquad \int_{[-1,1]} f(x-y)\, dy = e^{-|x-1|} - e^{-|x+1|},$$
$$\int_{\mathbb{R}} f(x-y)e^{-|y|}\, dy = e^{-\pi x^2}, \qquad \int_{\mathbb{R}} f(x-y)e^{-|y|}\, dy = (1+|x|)e^{-|x|},$$
$$\int_{\mathbb{R}} f(x-y)e^{-ay^2}\, dy = e^{-bx^2}, \qquad f(x) = e^{-|x|} + \frac{1}{2}e^x \int_{[x,+\infty)} e^{-y} f(y)\, dy.$$

14. Έστω συνεχής συνάρτηση $f \in L^1(\mathbb{R})$ ώστε
$$\widehat{f}(\xi) = 0 \qquad \text{για } |\xi| > \frac{1}{2}.$$
[α] Αποδείξτε ότι
$$f(x) = \int_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]} \widehat{f}(\xi)e^{2\pi i\xi x}\, d\xi \qquad \text{για κάθε } x.$$
[β] Θεωρήστε τις συναρτήσεις $\widehat{f}(\xi)$ και $g(\xi) = e^{2\pi i\xi x}$ στο διάστημα $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ και επεκτεταμένες ώστε να είναι 1-περιοδικές, βρείτε τους συντελεστές Fourier τους και αποδείξτε τον λεγόμενο **τύπο δειγματοληψίας του Shannon**:
$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)\frac{\sin(\pi(x-n))}{\pi(x-n)} \qquad \text{για κάθε } x.$$
Ο τύπος αυτός λέει ότι, με τις αρχικές υποθέσεις για την f, *η συνάρτηση f καθορίζεται από τις τιμές της στους ακεραίους*.

15. Έστω $k \in L^1(\mathbb{R})$ με $\|k\|_1 < 1$.
[α] Αποδείξτε ότι η σειρά
$$k + (k*k) + (k*k*k) + (k*k*k*k) + \cdots$$
συγκλίνει σε στοιχείο του $L^1(\mathbb{R})$, αποδεικνύοντας πρώτα ότι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς είναι Cauchy στον $L^1(\mathbb{R})$.
[β] Έστω $f, k \in L^1(\mathbb{R})$ και $\|k\|_1 < 1$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $g \in L^1(\mathbb{R})$ ώστε
$$g - k*g = f.$$

16. [α] Γνωρίζουμε ότι ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης
$$K_\eta(x) = \begin{cases} \frac{1}{\eta}\big(\frac{\sin(\eta\pi x)}{\pi x}\big)^2, & \text{αν } x \neq 0 \\ \eta, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$
η οποία ανήκει στον $L^1(\mathbb{R})$ είναι η συνάρτηση
$$\begin{cases} 1 - \frac{|\xi|}{\eta}, & \text{αν } |\xi| \leq \eta \\ 0, & \text{αν } |\xi| \geq \eta \end{cases}$$

Βρείτε τον μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης $g_\eta = 2K_{2\eta} - K_\eta$ και σχεδιάστε το γράφημά του. Ειδικώτερα, δείτε ότι

$$\widehat{g_\eta}(\xi) = 1 \qquad \text{για } |\xi| \leq \eta.$$

Συμπεράνατε ότι υπάρχουν συναρτήσεις στον $L^1(\mathbb{R})$ των οποίων οι μετασχηματισμοί Fourier είναι σταθεροί 1 σε όσο μεγάλα (φραγμένα) διαστήματα θέλουμε.
[β] Αποδείξτε, για κάθε $f \in L^1(\mathbb{R})$, ότι

$$\|f * g_\eta - f\|_1 \to 0 \qquad \text{όταν } \eta \to 0+.$$

Συμπεράνατε ότι, για κάθε $f \in L^1(\mathbb{R})$, υπάρχουν συναρτήσεις που προσεγγίζουν στον $L^1(\mathbb{R})$ την f και που οι μετασχηματισμοί Fourier τους ταυτίζονται με τον μετασχηματισμό Fourier της f σε όσο μεγάλα (φραγμένα) διαστήματα θέλουμε.
[γ] Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει μοναδιαίο στοιχείο στην άλγεβρα Banach $L^1(\mathbb{R})$.

17. Έστω $f, g \in L^2(\mathbb{R})$.
Αποδείξτε ότι ορίζεται η συνέλιξη

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\,dy \qquad \text{για } \textbf{κάθε } x$$

και ότι $f * g \in C_0(\mathbb{R})$.
[β] Αποδείξτε ότι ορίζεται ο μετασχηματισμός Fourier της συνέλιξης και ότι

$$\widehat{f * g} = \widehat{f}\widehat{g}.$$

[γ] Αποδείξτε ότι

$$\widehat{fg} = \widehat{f} * \widehat{g}.$$

18. [α] Έστω $f \in L^2(\mathbb{R})$. Αποδείξτε, βάσει του ορισμού του μετασχηματισμού Fourier για συναρτήσεις στον $L^2(\mathbb{R})$, ότι $\widehat{\overline{f}}(\xi) = \overline{\widehat{f}(-\xi)}$.
[β] Έστω $f, g \in L^2(\mathbb{R})$. Αποδείξτε ότι

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(-\xi)\,d\xi.$$

(Βεβαιωθείτε ότι ορίζονται και τα δυο ολοκληρώματα.)

19. Έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$ και $g \in L^2(\mathbb{R})$. Αποδείξτε, βάσει του ορισμού του μετασχηματισμού Fourier για συναρτήσεις στον $L^2(\mathbb{R})$, ότι

$$\widehat{f * g} = \widehat{f}\,\widehat{g}.$$

20. [α] Έστω $g = \chi_{[a,b]}$ για οποιοδήποτε φραγμένο διάστημα $[a, b]$. Βεβαιωθείτε ότι $g \in L^2(\mathbb{R})$ και αποδείξτε, χωρίς υπολογισμό του $\widehat{g}$ αλλά με χρήση του Θεωρήματος του Plancherel, ότι

$$\widehat{g} * \widehat{g} = \widehat{g}.$$