Λύσεις μερικών ακόμη ασκήσεων.

1. Υπολογίστε το

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x}{x} \frac{e^{i\xi x}}{1+x^2}\, dx.$$

Λύση. Από το Λήμμα 3.1 είναι φανερό ότι ο μετασχηματισμός Fourier της χαρακτηριστικής συνάρτησης $\chi_{[-1,1]}(\xi)$ του διαστήματος $[-1,1]$ είναι η συνάρτηση $D_1(x)$. Πράγματι,

$$\widehat{\chi_{[-1,1]}(\xi)}(x) = \int_{\mathbb{R}} \chi_{[-1,1]}(\xi) e^{-2\pi i \xi x}\, d\xi = \int_{-1}^{1} e^{-2\pi i \xi x}\, d\xi = D_1(x) = \frac{\sin(2\pi x)}{\pi x}.$$

Επίσης, ο μετασχηματισμός Fourier της $e^{-|\xi|}$ είναι η $P_{\frac{1}{2\pi}}(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\frac{1}{2\pi}}{\frac{1}{4\pi^2}+x^2} = \frac{2}{1+4\pi^2x^2}$. Δηλαδή,

$$\widehat{e^{-|\xi|}}(x) = \frac{2}{1+4\pi^2x^2}.$$

Άρα, αν ορίσουμε

$$f(\xi) = \chi_{[-1,1]}(\xi) * e^{-|\xi|} = \int_{\mathbb{R}} e^{-|\xi-\eta|}\chi_{[-1,1]}(\eta)\, d\eta = \int_{-1}^{1} e^{-|\xi-\eta|}\, d\eta, \tag{1}$$

τότε

$$\widehat{f(\xi)}(x) = \frac{\sin(2\pi x)}{\pi x}\frac{2}{1+4\pi^2x^2}.$$

Άρα, με αρχική αλλαγή μεταβλητής από x σε $2\pi x$, έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x}{x} \frac{e^{i\xi x}}{1+x^2}\, dx = 2\pi \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(2\pi x)}{2\pi x} \frac{e^{2\pi i \xi x}}{1+4\pi^2x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x) e^{2\pi i \xi x}\, dx = \frac{\pi}{2} f(\xi).$$

Αν θέλουμε, μπορούμε να βρούμε τον τύπο της f από την (1):

$$f(\xi) = \begin{cases} (e-\frac{1}{e})e^{\xi}, & \text{αν } \xi \le -1 \\ 2 - \frac{1}{e}(e^{\xi}+e^{-\xi}), & \text{αν } -1 \le \xi \le 1 \\ (e-\frac{1}{e})e^{-\xi}, & \text{αν } 1 \le \xi \end{cases}$$

□

2. Βρείτε λύσεις $f \in L^1(\mathbb{R})$ των παρακάτω ολοκληρωτικών εξισώσεων, παίρνοντας μετασχηματισμούς Fourier των δυο πλευρών κάθε εξίσωσης.

$$\int_{\mathbb{R}} f(x-y)e^{-|y|}\, dy = \frac{4}{3}e^{-|x|} - \frac{2}{3}e^{-2|x|}, \qquad \int_{[-1,1]} f(x-y)\, dy = e^{-|x-1|} - e^{-|x+1|},$$

$$\int_{\mathbb{R}} f(x-y)e^{-|y|}\, dy = e^{-\pi x^2}, \qquad \int_{\mathbb{R}} f(x-y)e^{-|y|}\, dy = (1+|x|)e^{-|x|},$$

$$\int_{\mathbb{R}} f(x-y)e^{-ay^2}\, dy = e^{-bx^2}, \qquad f(x) = e^{-|x|} + \frac{1}{2}e^{x}\int_{[x,+\infty)} e^{-y} f(y)\, dy.$$

Λύση. Η λύση της δεύτερης ολοκληρωτικής εξίσωσης.

Παρατηρούμε ότι η αριστερή πλευρά της εξίσωσης είναι η συνέλιξη της f με τη συνάρτηση $\chi_{[-1,1]}$ της οποίας ο μετασχηματισμός Fourier είναι η συνάρτηση $\frac{\sin(2\pi\xi)}{\pi\xi}$.

Ο μετασχηματισμός Fourier της $e^{-|x|}$ είναι η συνάρτηση $\frac{2}{1+4\pi^2\xi^2}$. Άρα ο μετασχηματισμός Fourier της $e^{-|x-1|}$ είναι η $\frac{2}{1+4\pi^2\xi^2}e^{-2\pi i\xi}$ και της $e^{-|x+1|}$ είναι η $\frac{2}{1+4\pi^2\xi^2}e^{2\pi i\xi}$.
Παίρνοντας μετασχηματισμό Fourier των δυο πλευρών της εξίσωσης, βρίσκουμε

$$\widehat{f}(\xi)\frac{\sin(2\pi\xi)}{\pi\xi} = \frac{2}{1+4\pi^2\xi^2}e^{-2\pi i\xi} - \frac{2}{1+4\pi^2\xi^2}e^{2\pi i\xi} = -\frac{4i\sin(2\pi\xi)}{1+4\pi^2\xi^2}.$$

Λύνουμε:

$$\widehat{f}(\xi) = -\frac{4\pi i\xi}{1+4\pi^2\xi^2}.$$

Η αλήθεια είναι ότι δεν έχουμε έτοιμη κάποια συνάρτηση της οποίας ο μετασχηματισμός Fourier είναι η $-\frac{4\pi i\xi}{1+4\pi^2\xi^2}$. Οπότε χρειάζεται να δείξουμε ευρηματικότητα!

Ας δούμε πρώτα πώς βρίσκουμε τον μετασχηματισμό Fourier της $e^{-|x|}$. Ιδού:

$$\begin{aligned}\widehat{e^{-|x|}}(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}e^{-2\pi i\xi x}\,dx = \int_{-\infty}^{0} e^{x}e^{-2\pi i\xi x}\,dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-x}e^{-2\pi i\xi x}\,dx\\ &= \int_{-\infty}^{0} e^{(1-2\pi i\xi)x}\,dx + \int_{0}^{+\infty} e^{(-1-2\pi i\xi)x}\,dx = \frac{1}{1-2\pi i\xi} + \frac{1}{1+2\pi i\xi} = \frac{2}{1+4\pi^2\xi^2}.\end{aligned}$$

Τώρα παρατηρήστε ότι, αν αφαιρέσουμε αντί να προσθέσουμε τους λόγους $\frac{1}{1-2\pi i\xi}$, $\frac{1}{1+2\pi i\xi}$, θα βρούμε

$$-\frac{1}{1-2\pi i\xi} + \frac{1}{1+2\pi i\xi} = -\frac{4\pi i\xi}{1+4\pi^2\xi^2}.$$

Επομένως, ορίζουμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} -e^{x}, & \text{αν } x \le 0\\ e^{-x}, & \text{αν } x \ge 0\end{cases} \tag{2}$$

και τότε

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2\pi i\xi x}\,dx = -\int_{-\infty}^{0} e^{x}e^{-2\pi i\xi x}\,dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-x}e^{-2\pi i\xi x}\,dx\\ &= -\int_{-\infty}^{0} e^{(1-2\pi i\xi)x}\,dx + \int_{0}^{+\infty} e^{(-1-2\pi i\xi)x}\,dx = -\frac{1}{1-2\pi i\xi} + \frac{1}{1+2\pi i\xi} = -\frac{4\pi i\xi}{1+4\pi^2\xi^2}.\end{aligned}$$

Άρα η ζητούμενη συνάρτηση είναι ακριβώς η f που ορίσαμε με τον τύπο (2). □