

Μια ακόμη λύση.

1. Έστω συνεχής συνάρτηση $f \in L^1(\mathbb{R})$ ώστε

$$\widehat{f}(\xi) = 0 \quad \text{για } |\xi| > \frac{1}{2}.$$

[α] Αποδείξτε ότι

$$f(x) = \int_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi \quad \text{για κάθε } x.$$

[β] Θεωρήστε τις συναρτήσεις $\widehat{f}(\xi)$ και $g(\xi) = e^{-2\pi i \xi x}$ στο διάστημα $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ και επεκτεταμένες ώστε να είναι 1-περιοδικές, βρείτε τους συντελεστές Fourier τους και αποδείξτε τον λεγόμενο **τύπο δειγματοληψίας του Shannon**:

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) \frac{\sin(\pi(x-n))}{\pi(x-n)} \quad \text{για κάθε } x.$$

Ο τύπος αυτός λέει ότι, με τις αρχικές υποθέσεις για την f , η συνάρτηση f καθορίζεται από τις τιμές της στους ακεραίους.

Απόδειξη. [α] Γνωρίζουμε ότι η \widehat{f} είναι συνεχής στο \mathbb{R} και, επομένως, και στο $[-1, 1]$. Άρα η \widehat{f} είναι ολοκληρώσιμη στο $[-1, 1]$ και, επειδή μηδενίζεται έξω από το $[-1, 1]$, είναι ολοκληρώσιμη στο \mathbb{R} .

Άρα ισχύει ο τύπος ανακατασκευής της f από την \widehat{f} , δηλαδή

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi = \int_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi \quad \text{για σ.κ. } x.$$

Τώρα βλέπουμε ότι και οι δυο πλευρές της τελευταίας ισότητας είναι συνεχείς στο \mathbb{R} . Η f είναι συνεχής λόγω υπόθεσης. Η δεξιά πλευρά είναι συνεχής διότι είναι

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(-\xi) e^{-2\pi i \xi x} d\xi,$$

δηλαδή ο μετασχηματισμός Fourier της ολοκληρώσιμης συνάρτησης $\widehat{f}(-\xi)$.

Τέλος, αν δυο συνεχείς συναρτήσεις f_1 και f_2 είναι ίσες σ.π., τότε είναι ίσες (παντού). Πράγματι, έστω τυχών x . Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει σημείο του διαστήματος $(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n})$ στο οποίο οι συναρτήσεις έχουν ίσες τιμές. Σε αντίθετη περίπτωση, το διάστημα αυτό θα ήταν υποσύνολο του συνόλου στο οποίο οι συναρτήσεις δεν είναι ίσες, οπότε θα ήταν μηδενικού μέτρου. Αυτό είναι άτοπο. Άρα για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $x_n \in (x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n})$ ώστε $f_1(x_n) = f_2(x_n)$. Συνεπάγεται $x_n \rightarrow x$, οπότε, λόγω συνέχειας, έχουμε $f_1(x_n) \rightarrow f_1(x)$ και $f_2(x_n) \rightarrow f_2(x)$. Άρα $f_1(x) = f_2(x)$. Επομένως,

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi = \int_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi \quad \text{για κάθε } x. \quad (1)$$

[β] Έστω $F(\xi)$ η συνάρτηση $\widehat{f}(\xi)$ στο διάστημα $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ επεκτεταμένη ώστε να είναι 1-περιοδική. Επίσης, έστω $g(\xi)$ η συνάρτηση $e^{-2\pi i \xi x}$ στο διάστημα $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ επεκτεταμένη ώστε να είναι 1-περιοδική. Τότε

$$\widehat{F}(n) = \int_{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} F(\xi) e^{-2\pi i n \xi} d\xi = \int_{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} \widehat{f}(\xi) e^{-2\pi i n \xi} d\xi = f(-n) \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{Z},$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει από την (1).

Επίσης,

$$\begin{aligned}\widehat{g}(n) &= \int_{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} g(\xi) e^{-2\pi i n \xi} d\xi = \int_{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} e^{-2\pi i \xi x} e^{-2\pi i n \xi} d\xi = \int_{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} e^{-2\pi i (x+n)\xi} d\xi \\ &= \begin{cases} \frac{\sin(\pi(x+n))}{\pi(x+n)}, & \text{αν } n \in \mathbb{Z}, n \neq -x \\ 1, & \text{αν } n \in \mathbb{Z}, n = -x \end{cases}\end{aligned}$$

Τώρα παρατηρούμε ότι οι F και g είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμες στο $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, διότι είναι συνεχείς και φραγμένες. Άρα, από την ταυτότητα του Parseval και από την (1),

$$\begin{aligned}f(x) &= \int_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi = \int_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} F(\xi) \overline{g(\xi)} d\xi \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{F}(n) \overline{\widehat{g}(n)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(-n) \widehat{g}(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) \widehat{g}(-n).\end{aligned}\tag{2}$$

Τώρα, αν ο x δεν είναι ακέραιος, τότε δεν ισχύει $n = -x$ για κανέναν $n \in \mathbb{Z}$, οπότε η (2) γίνεται

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) \frac{\sin(\pi(x-n))}{\pi(x-n)}.$$

Αν ο x είναι ακέραιος, δηλαδή αν $x = n_0$ για κάποιον $n_0 \in \mathbb{Z}$, τότε

$$\widehat{g}(-n_0) = 1 \quad \text{και} \quad \widehat{g}(n) = 0 \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{Z}, n \neq -n_0.$$

Επομένως, το άθροισμα $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) \frac{\sin(\pi(x-n))}{\pi(x-n)}$ γράφεται (αν δεχτούμε ότι $\frac{\sin 0}{0} = 1$)

$$\begin{aligned}\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) \frac{\sin(\pi(x-n))}{\pi(x-n)} &= f(n_0) \cdot 1 + \sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq -n_0} f(n) \cdot 0 \\ &= f(n_0) \cdot \widehat{g}(-n_0) + \sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq -n_0} f(n) \widehat{g}(-n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) \widehat{g}(-n)\end{aligned}$$

και, λόγω της (2),

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) \frac{\sin(\pi(x-n))}{\pi(x-n)}.$$

□