

Λύσεις μερικών ασκήσεων του τρίτου φυλλαδίου.

1. Έστω $0 < a < \frac{1}{2}$. Θεωρήστε τη σειρά Fourier της 1-περιοδικής συνάρτησης με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } |x| < a \\ 0, & \text{αν } a < |x| < \frac{1}{2} \end{cases}$$

και, εφαρμόζοντας το Θεώρημα 2.4, υπολογίστε το άθροισμα

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2\pi nx)}{n} \quad \text{για κάθε } x.$$

Συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$ η σειρά Fourier της f ;

Λύση. Η συνάρτηση είναι ορισμένη στο διάστημα $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ εκτός από τα σημεία $\pm a$ και $\frac{1}{2}$. Αυτό δεν πειράζει διότι τα τρία αυτά σημεία αποτελούν σύνολο μηδενικού μέτρου.

Υπολογίζουμε:

$$\hat{f}(n) = \int_{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} f(x) e^{-2\pi i n x} dx = \int_{-a}^a e^{-2\pi i n x} dx = \begin{cases} 2a, & \text{αν } n = 0 \\ \frac{\sin(2\pi na)}{\pi n}, & \text{αν } n \geq 0 \end{cases}$$

Άρα

$$f(x) \sim 2a + \sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0} \frac{\sin(2\pi na)}{\pi n} e^{2\pi i n x},$$

όπου το σύμβολο $\sim$ δηλώνει ότι η συνάρτηση $f(x)$ στην αριστερή πλευρά έχει σειρά Fourier την σειρά της δεξιάς πλευράς.

Παρατηρούμε ότι το άθροισμα που πρέπει να υπολογίσουμε είναι (μετά από αλλαγή συμβόλου από x σε a) ουσιαστικά ίσο με το άθροισμα της σειράς Fourier για $x = 0$. Γι αυτό θα βρούμε το άθροισμα της σειράς Fourier για $x = 0$.

Παρατηρούμε ότι η f είναι συνεχής στο $x = 0$ και παραγωγίσιμη στο $x = 0$. Άρα, για $x = 0$ έχουμε:

$$2a + \sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0} \frac{\sin(2\pi na)}{\pi n} e^{2\pi i n 0} = f(0),$$

οπότε

$$2a + \sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0} \frac{\sin(2\pi na)}{\pi n} = 1.$$

Βλέπουμε ότι οι όροι της σειράς έχουν ίδιες τιμές για n και για $-n$, οπότε

$$2a + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2\pi na)}{\pi n} = 1.$$

Άρα

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2\pi na)}{n} = \left(\frac{1}{2} - a\right)\pi.$$

Τώρα θα δούμε πώς συμπεριφέρεται η σειρά για οποιονδήποτε $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Αν $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ και $x \neq \pm a$ και $x \neq \frac{1}{2}$, τότε η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στον x . Άρα

$$2a + \sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0} \frac{\sin(2\pi na)}{\pi n} e^{2\pi i n x} = f(x) \quad \text{για } x \in \left(-\frac{1}{2}, -a\right) \cup (-a, a) \cup \left(a, \frac{1}{2}\right). \quad (1)$$

Αν $x = -a$, η f δεν είναι καν ορισμένη στον $-a$, οπότε βλέπουμε αν έχει πεπερασμένα πλευρικά όρια και πεπερασμένες πλευρικές παραγώγους στον $-a$. Πράγματι,

$$f(-a-) = \lim_{x \rightarrow -a-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -a-} 0 = 0, \quad f(-a+) = \lim_{x \rightarrow -a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -a+} 1 = 1$$

και

$$f'_-(-a) = \lim_{x \rightarrow -a-} \frac{f(x) - f(-a-)}{x - (-a)} = \lim_{x \rightarrow -a-} \frac{0 - 0}{x + a} = 0,$$

$$f'_+(-a) = \lim_{x \rightarrow -a+} \frac{f(x) - f(-a+)}{x - (-a)} = \lim_{x \rightarrow -a+} \frac{1 - 1}{x + a} = 0.$$

Άρα, για $x = -a$ έχουμε:

$$2a + \sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0} \frac{\sin(2\pi na)}{\pi n} e^{2\pi i n (-a)} = \frac{f(-a-) + f(-a+)}{2} = \frac{1}{2}. \quad (2)$$

Αν $x = a$, κάνουμε τα ίδια:

$$f(a-) = \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-} 1 = 1, \quad f(a+) = \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} 0 = 0$$

και

$$f'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a-} \frac{f(x) - f(a-)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a-} \frac{1 - 1}{x - a} = 0,$$

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x) - f(a+)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{0 - 0}{x - a} = 0.$$

Άρα, για $x = a$ έχουμε:

$$2a + \sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0} \frac{\sin(2\pi na)}{\pi n} e^{2\pi i n a} = \frac{f(a-) + f(a+)}{2} = \frac{1}{2}. \quad (3)$$

Τέλος, παρατηρούμε ότι μπορεί να μην είναι ορισμένη η f στον $\frac{1}{2}$ αλλά, αν θέσουμε $f(\frac{1}{2}) = 0$, τότε η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στον $\frac{1}{2}$. Άρα, για $x = \frac{1}{2}$ έχουμε:

$$2a + \sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0} \frac{\sin(2\pi na)}{\pi n} e^{2\pi i n \frac{1}{2}} = f\left(\frac{1}{2}\right) = 0. \quad (4)$$

Συνολικά, από τις (1) - (4) έχουμε

$$2a + \sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0} \frac{\sin(2\pi na)}{\pi n} e^{2\pi i n x} = \begin{cases} 0, & \text{αν } -\frac{1}{2} < x < -a \\ \frac{1}{2}, & \text{αν } x = -a \\ 1, & \text{αν } -a < x < a \\ \frac{1}{2}, & \text{αν } x = a \\ 0, & \text{αν } a < x \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Τα προηγούμενα ισχύουν στο διάστημα $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Δηλαδή η σειρά συγκλίνει στο διάστημα αυτό στην συνάρτηση που βλέπουμε με τον πολλαπλό τύπο στην δεξιά πλευρά της τελευταίας εξίσωσης. Επειδή η σειρά είναι 1-περιοδική, συγκλίνει σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$ στην συνάρτηση που παίρνουμε επεκτείνοντας 1-περιοδικά την τελευταία αυτή συνάρτηση από το $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$. Τώρα βλέπουμε ότι η 1-περιοδική συνάρτηση στην οποία συγκλίνει η σειρά Fourier στο $\mathbb{R}$ δεν είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και, συγκεκριμένα, στα σημεία $x = \pm a + k$ με $k \in \mathbb{Z}$. Αν η σύγκλιση της σειράς ήταν ομοιόμορφη, τότε, επειδή κάθε όρος-συνάρτηση της σειράς είναι συνεχής, θα ήταν και η οριακή συνάρτηση συνεχής. Άρα η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη. $\square$

2. Έστω $t \neq 0$. Θεωρήστε τη σειρά Fourier της 1-περιοδικής συνάρτησης με τύπο

$$f(x) = e^{2\pi tx} \quad \text{για} \quad -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$$

και, εφαρμόζοντας το Θεώρημα 2.4, αποδείξτε ότι

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{t^2 + n^2} = \frac{\pi}{2t} \frac{e^{\pi t} + e^{-\pi t}}{e^{\pi t} - e^{-\pi t}} - \frac{1}{2t^2}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{t^2 + n^2} = \frac{2\pi t - (e^{\pi t} - e^{-\pi t})}{2t^2(e^{\pi t} - e^{-\pi t})}.$$

Συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$ η σειρά Fourier της f ;

Λύση. Η συνάρτηση είναι ορισμένη στο διάστημα $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ εκτός από το σημείο $\frac{1}{2}$. Αυτό δεν πειράζει διότι το σημείο αυτό αποτελεί σύνολο μηδενικού μέτρου.

Υπολογίζουμε:

$$\hat{f}(n) = \int_{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} f(x) e^{-2\pi i n x} dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{2\pi(t-in)x} dx = \frac{e^{\pi(t-in)} - e^{-\pi(t-in)}}{2\pi(t-in)} = \frac{(-1)^n(e^{\pi t} - e^{-\pi t})}{2\pi(t-in)}.$$

Άρα

$$f(x) \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^n(e^{\pi t} - e^{-\pi t})}{2\pi(t-in)} e^{2\pi i n x},$$

όπου το σύμβολο $\sim$ δηλώνει ότι η συνάρτηση $f(x)$ στην αριστερή πλευρά έχει σειρά Fourier την σειρά της δεξιάς πλευράς. Η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη σε κάθε $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Άρα έχουμε

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^n(e^{\pi t} - e^{-\pi t})}{2\pi(t-in)} e^{2\pi i n x} = f(x) = e^{2\pi t x} \quad \text{για} \quad -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}. \quad (5)$$

Τώρα, η συνάρτηση δεν είναι καν ορισμένη στον $\frac{1}{2}$, οπότε βλέπουμε αν έχει πεπερασμένα πλευρικά όρια και πεπερασμένες πλευρικές παραγώγους στον $\frac{1}{2}$. Εδώ θα μας βοηθήσει να σκεφτούμε ότι, επειδή η συνάρτηση είναι 1-περιοδική, όταν υπολογίζουμε όρια στον $\frac{1}{2}$ από την δεξιά πλευρά του, τότε μπορούμε να χρησιμοποιούμε τις τιμές της συνάρτησης κοντά στον $-\frac{1}{2}$ και από την δεξιά πλευρά του (για να μην χρειαστεί να γράψουμε τον τύπο που πρέπει να έχει η συνάρτηση στο διάστημα $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$). Πράγματι,

$$f\left(\frac{1}{2} -\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2} -} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2} -} e^{2\pi t x} = e^{\pi t}, \quad f\left(\frac{1}{2} +\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2} +} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2} +} e^{2\pi t x} = e^{-\pi t}$$

και

$$f'_-\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2} -} \frac{f(x) - f(\frac{1}{2} -)}{x - \frac{1}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2} -} \frac{e^{2\pi t x} - e^{\pi t}}{x - \frac{1}{2}} = 2\pi t e^{\pi t},$$

$$f'_+\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2} +} \frac{f(x) - f(\frac{1}{2} +)}{x - \frac{1}{2}} = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2} +} \frac{e^{2\pi t x} - e^{-\pi t}}{x + \frac{1}{2}} = 2\pi t e^{-\pi t}.$$

Άρα, για $x = \frac{1}{2}$ έχουμε:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^n(e^{\pi t} - e^{-\pi t})}{2\pi(t-in)} e^{2\pi i n \frac{1}{2}} = \frac{f(\frac{1}{2} -) + f(\frac{1}{2} +)}{2} = \frac{e^{\pi t} + e^{-\pi t}}{2}. \quad (6)$$

Συνολικά, από τις (5) και (6),

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^n(e^{\pi t} - e^{-\pi t})}{2\pi(t-in)} e^{2\pi i n x} = \begin{cases} e^{2\pi t x}, & \text{αν } -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \\ \frac{e^{\pi t} + e^{-\pi t}}{2}, & \text{αν } x = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (7)$$

Τα προηγούμενα ισχύουν στο διάστημα $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Δηλαδή η σειρά συγκλίνει στο διάστημα αυτό στην συνάρτηση που βλέπουμε με τον πολλαπλό τύπο στην δεξιά πλευρά της τελευταίας εξίσωσης. Επειδή η σειρά είναι 1-περιοδική, συγκλίνει σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$ στην συνάρτηση που παίρνουμε επεκτείνοντας 1-περιοδικά την τελευταία αυτή συνάρτηση από το $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$. Τώρα βλέπουμε ότι η 1-περιοδική συνάρτηση στην οποία συγκλίνει η σειρά Fourier στο $\mathbb{R}$ δεν είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και, συγκεκριμένα, στα σημεία $\frac{1}{2} + k$ με $k \in \mathbb{Z}$. Αν η σύγκλιση της σειράς ήταν ομοιόμορφη, τότε, επειδή κάθε όρος-συνάρτηση της σειράς είναι συνεχής, θα ήταν και η οριακή συνάρτηση συνεχής. Άρα η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη.

Για να αποδείξουμε τους δυο ειδικούς τύπους θα χρησιμοποιήσουμε τα αθροίσματα της σειράς Fourier για $x = 0$ και για $x = \frac{1}{2}$.

Κατ'αρχάς, γράφουμε

$$\frac{1}{t - in} = \frac{t + in}{t^2 + n^2},$$

οπότε η σειρά Fourier γράφεται:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^n (e^{\pi t} - e^{-\pi t})}{2\pi(t - in)} e^{2\pi i n x} = \frac{e^{\pi t} - e^{-\pi t}}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^n (t + in)}{t^2 + n^2} e^{2\pi i n x}. \quad (8)$$

Για $x = 0$ η σειρά Fourier γράφεται:

$$\frac{e^{\pi t} - e^{-\pi t}}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^n (t + in)}{t^2 + n^2} = \frac{e^{\pi t} - e^{-\pi t}}{2\pi} t \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{t^2 + n^2} + \frac{e^{\pi t} - e^{-\pi t}}{2\pi} i \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^n n}{t^2 + n^2}.$$

Παρατηρούμε ότι οι συμμετρικοί όροι στο πρώτο άθροισμα της δεξιάς πλευράς είναι ίσοι ενώ οι συμμετρικοί όροι στο δεύτερο άθροισμα της δεξιάς πλευράς είναι αντίθετοι. Άρα για $x = 0$ η σειρά Fourier γράφεται (αφού ξεχωρίσουμε τον όρο που αντιστοιχεί στον $n = 0$):

$$\frac{e^{\pi t} - e^{-\pi t}}{2\pi} \frac{1}{t} + \frac{e^{\pi t} - e^{-\pi t}}{\pi} t \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{t^2 + n^2}.$$

Σύμφωνα με την (5) ή την (7), αυτό το άθροισμα είναι ίσο με $e^{2\pi t 0} = 1$. Άρα

$$\frac{e^{\pi t} - e^{-\pi t}}{\pi} t \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{t^2 + n^2} = 1 - \frac{e^{\pi t} - e^{-\pi t}}{2\pi} \frac{1}{t},$$

οπότε

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{t^2 + n^2} = \frac{2\pi t - (e^{\pi t} - e^{-\pi t})}{2t^2(e^{\pi t} - e^{-\pi t})}.$$

Για $x = \frac{1}{2}$ η σειρά Fourier στην (8) γράφεται:

$$\frac{e^{\pi t} - e^{-\pi t}}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{t + in}{t^2 + n^2} = \frac{e^{\pi t} - e^{-\pi t}}{2\pi} t \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{t^2 + n^2} + \frac{e^{\pi t} - e^{-\pi t}}{2\pi} i \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{n}{t^2 + n^2}.$$

Παρατηρούμε ότι, πάλι, οι συμμετρικοί όροι στο πρώτο άθροισμα της δεξιάς πλευράς είναι ίσοι ενώ οι συμμετρικοί όροι στο δεύτερο άθροισμα της δεξιάς πλευράς είναι αντίθετοι. Άρα για $x = \frac{1}{2}$ η σειρά Fourier γράφεται (αφού ξεχωρίσουμε τον όρο που αντιστοιχεί στον $n = 0$):

$$\frac{e^{\pi t} - e^{-\pi t}}{2\pi} \frac{1}{t} + \frac{e^{\pi t} - e^{-\pi t}}{\pi} t \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{t^2 + n^2}.$$

Σύμφωνα με την (6) ή την (7), αυτό το άθροισμα είναι ίσο με $\frac{e^{\pi t} + e^{-\pi t}}{2}$. Άρα

$$\frac{e^{\pi t} - e^{-\pi t}}{\pi} t \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{t^2 + n^2} = \frac{e^{\pi t} + e^{-\pi t}}{2} - \frac{e^{\pi t} - e^{-\pi t}}{2\pi} \frac{1}{t},$$

οπότε

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{t^2 + n^2} = \frac{\pi}{2t} \frac{e^{\pi t} + e^{-\pi t}}{e^{\pi t} - e^{-\pi t}} - \frac{1}{2t^2}.$$

□

3. Θεωρήστε την συνάρτηση με τύπο $f(x) = x$ για $0 < x < \frac{1}{2}$.

[α] Πώς θα αναπτύξετε την f ως σειρά ημιτόνων

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(2\pi n x)$$

στο διάστημα $(0, \frac{1}{2})$; Σκεφτείτε ότι, αν γίνει κάτι τέτοιο, τότε η f θα έχει μια συγκεκριμένη περιοδικότητα (ποιά;) και ότι θα έχει ένα επιπλέον χαρακτηριστικό (ποιό;) ως συνάρτηση.

[β] Πώς θα αναπτύξετε την f ως σειρά συνημιτόνων

$$a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(2\pi n x)$$

στο διάστημα $(0, \frac{1}{2})$;

Λύση. [α] Η συνάρτηση που ορίζεται από μια σειρά ημιτόνων είναι αναγκαστικά 1-περιοδική και περιττή. Άρα, κατ' αρχάς, θα επεκτείνουμε την δοσμένη συνάρτηση στο συμμετρικό διάστημα $(-\frac{1}{2}, 0)$ ώστε να είναι περιττή και, κατόπιν, θα την επεκτείνουμε 1-περιοδικά. Θα την ορίσουμε και στον $x = 0$ να έχει τιμή $f(0) = 0$, οπότε θα είναι συνεχής στον 0. Άρα η συνάρτησή μας έχει τύπο

$$f(x) = x \quad \text{για} \quad -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}.$$

Η f είναι ορισμένη στο διάστημα $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ εκτός από το σημείο $\frac{1}{2}$. Αυτό δεν πειράζει διότι το σημείο αυτό αποτελεί σύνολο μηδενικού μέτρου.

Υπολογίζουμε

$$\hat{f}(n) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x e^{-2\pi i n x} dx = \begin{cases} \frac{(-1)^{n-1}}{2\pi i n}, & \text{αν } n \neq 0 \\ 0, & \text{αν } n = 0 \end{cases}$$

Άρα

$$f(x) \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0} \frac{(-1)^{n-1}}{2\pi i n} e^{2\pi i n x},$$

όπου το σύμβολο $\sim$ δηλώνει ότι η συνάρτηση $f(x)$ στην αριστερή πλευρά έχει σειρά Fourier την σειρά της δεξιάς πλευράς.

Τώρα, η σειρά Fourier γράφεται:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0} \frac{(-1)^{n-1}}{2\pi i n} e^{2\pi i n x} = \sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0} \frac{(-1)^{n-1}}{2\pi i n} \cos(2\pi n x) + i \sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0} \frac{(-1)^{n-1}}{2\pi i n} \sin(2\pi n x).$$

Παρατηρούμε ότι οι συμμετρικοί όροι στο πρώτο άθροισμα της δεξιάς πλευράς είναι αντίθετοι ενώ οι συμμετρικοί όροι στο δεύτερο άθροισμα της δεξιάς πλευράς είναι ίσοι. Άρα η σειρά Fourier γράφεται:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\pi n} \sin(2\pi n x).$$

Τέλος, επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη σε κάθε $x \in (0, \frac{1}{2})$, συνεπάγεται

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\pi n} \sin(2\pi n x) = f(x) = x \quad \text{για } 0 < x < \frac{1}{2}.$$

Άρα παίρνουμε

$$b_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\pi n} \quad \text{για } n \in \mathbb{N}.$$

[β] Δική σας υπόθεση. Η λύση είναι παρόμοια. □

4. Έστω 1-περιοδική $f \in L^1([0, 1))$.

[α] Αν $k \in \mathbb{N}$ και

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^k |\widehat{f}(n)| < +\infty,$$

αποδείξτε ότι η f είναι σ.π. ίση με μια συνάρτηση η οποία είναι k φορές συνεχώς παραγωγίσιμη.

Αντιστρόφως, αν η f είναι σ.π. ίση με μια συνάρτηση η οποία είναι k φορές συνεχώς παραγωγίσιμη, αποδείξτε ότι

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^{k-2} |\widehat{f}(n)| < +\infty.$$

Μπορείτε, στην τελευταία σχέση, το $k - 2$ να το κάνετε $k - 1$;

[β] Αποδείξτε ότι η f είναι σ.π. ίση με μια συνάρτηση η οποία είναι άπειρες φορές συνεχώς παραγωγίσιμη αν και μόνο αν

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^k |\widehat{f}(n)| < +\infty \quad \text{για κάθε } k \geq 1.$$

Λύση. [α] Θα θεωρήσουμε μόνο την περίπτωση $k = 1$ και δεν θα ασχοληθούμε με το [β].

Υποθέτουμε, λοιπόν, ότι

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |n| |\widehat{f}(n)| < +\infty.$$

Θεωρούμε τις σειρές

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) e^{2\pi i n x}, \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} 2\pi i n \widehat{f}(n) e^{2\pi i n x}. \quad (9)$$

Για τους όρους - συναρτήσεις της δεύτερης σειράς έχουμε ότι

$$|2\pi i n \widehat{f}(n) e^{2\pi i n x}| = 2\pi |n| |\widehat{f}(n)|,$$

οπότε, βάσει της υπόθεσης και του κριτηρίου του Weierstrass για ομοιόμορφη σύγκλιση σειρών συναρτήσεων, συνεπάγεται ότι η δεύτερη σειρά στην (9) συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.

Επίσης, για κάθε x έχουμε

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(n) e^{2\pi i n x}| = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)| \leq |\widehat{f}(0)| + \sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0} |n| |\widehat{f}(n)| < +\infty,$$

οπότε και η πρώτη σειρά στην (9) συγκλίνει για κάθε x (ένα μόνο x είναι αρκετό).

Σύμφωνα με ένα γνωστό θεώρημα, συμπεραίνουμε ότι η πρώτη σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$ και ορίζει συνάρτηση, έστω g , παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ έτσι ώστε η παράγωγος της g ταυτίζεται με την συνάρτηση που ορίζεται από την δεύτερη σειρά στην (9). Δηλαδή

$$g(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) e^{2\pi i n x}, \quad g'(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} 2\pi i n \widehat{f}(n) e^{2\pi i n x} \quad \text{για κάθε } x.$$

Τώρα, λόγω ομοιόμορφης σύγκλισης της σειράς που ορίζει την g , έχουμε ότι η σειρά αυτή είναι η σειρά Fourier της g , δηλαδή

$$\widehat{g}(n) = \widehat{f}(n) \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{Z}.$$

Αρα

$$g(x) = f(x) \quad \text{για σ.κ. } x.$$

Τέλος, επειδή η δεύτερη σειρά στην (9) συγκλίνει ομοιόμορφα και κάθε όρος - συνάρτηση είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, η συνάρτηση g' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Αρα η f είναι σ.π. ίση με μια συνάρτηση, την g , η οποία είναι μια φορά συνεχώς παραγωγίσιμη.

Τώρα, αντιστρόφως, έστω ότι $f = g$ σ.π., όπου η g είναι μια φορά συνεχώς παραγωγίσιμη. Τότε γνωρίζουμε ότι υπάρχει κάποια σταθερά c ανεξάρτητη του n ώστε να είναι

$$|\widehat{g}(n)| \leq \frac{c}{|n|} \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{Z}, n \neq 0.$$

Επειδή $f = g$ σ.π., έχουμε $\widehat{f}(n) = \widehat{g}(n)$ για κάθε n , οπότε

$$|\widehat{f}(n)| \leq \frac{c}{|n|} \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{Z}, n \neq 0. \quad (10)$$

Αρα

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0} |n|^{1-2} |\widehat{f}(n)| = \sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0} \frac{1}{|n|} |\widehat{f}(n)| \leq c \sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0} \frac{1}{n^2} = 2c \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty.$$

Τώρα, μας ζητούν να αποδείξουμε, αν γίνεται, ότι

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0} |n|^{1-1} |\widehat{f}(n)| < +\infty,$$

δηλαδή

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0} |\widehat{f}(n)| < +\infty.$$

Είναι σαφές ότι η (10) δεν αρκεί για κάτι τέτοιο.

Η g' είναι, λόγω υπόθεσης, συνεχής, οπότε αφ' ενός

$$g' \in L^2([0, 1))$$

αφ' ετέρου

$$\widehat{g'}(n) = 2\pi i n \widehat{g}(n) \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{Z}.$$

Από την ταυτότητα Parseval έχουμε

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{g'}(n)|^2 = \|g'\|_2^2 < +\infty$$

και, επομένως,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} n^2 |\widehat{g}(n)|^2 < +\infty$$

και, επομένως,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} n^2 |\widehat{f}(n)|^2 < +\infty.$$

Τώρα έχουμε δυο δυνατότητες. Η πιο fancy είναι να χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα του Cauchy:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0} |\widehat{f}(n)| = \sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0} \frac{1}{|n|} |n| |\widehat{f}(n)| \leq \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0} n^2 |\widehat{f}(n)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty.$$

Η άλλη δυνατότητα είναι να χρησιμοποιήσουμε την πιο απλή ανισότητα

$$|ab| \leq \frac{1}{2} |a|^2 + \frac{1}{2} |b|^2$$

για να πάρουμε

$$|\widehat{f}(n)| = \frac{1}{|n|} |n| |\widehat{f}(n)| \leq \frac{1}{2} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2} n^2 |\widehat{f}(n)|^2$$

και, κατόπιν,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0} |\widehat{f}(n)| \leq \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0} \frac{1}{n^2} + \sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0} n^2 |\widehat{f}(n)|^2 < +\infty.$$

Όπως να' ναι, έχουμε αποδείξει ότι $\sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0} |\widehat{f}(n)| < +\infty$. □

5. Έστω $n \in \mathbb{N}$. Υπολογίστε τους αριθμούς $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ ώστε η παράσταση

$$\int_0^{\frac{1}{2}} |a_0 + a_1 \cos(2\pi x) + \dots + a_{n-1} \cos(2\pi(n-1)x) - \cos^n(2\pi x)|^2 dx$$

να έχει την ελάχιστη δυνατή τιμή.

Λύση. Επειδή οι συναρτήσεις που εμφανίζονται στην παράσταση που θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε είναι άρτιες, η παράσταση γράφεται

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |a_0 + a_1 \cos(2\pi x) + \dots + a_{n-1} \cos(2\pi(n-1)x) - \cos^n(2\pi x)|^2 dx.$$

Ένας ακόμη λόγος να επεκταθούμε στο διάστημα $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ είναι ότι όλες οι συναρτήσεις είναι 1-περιοδικές ενώ τουλάχιστον η $\cos(2\pi x)$ δεν είναι $\frac{1}{2}$ -περιοδική.

Αν θέσουμε

$$f_0(x) = 1, f_1(x) = \cos(2\pi x), \dots, f_{n-1}(x) = \cos(2\pi(n-1)x) \quad \text{και} \quad f(x) = \cos^n(2\pi x),$$

τότε η παράσταση γράφεται

$$\|(a_0 f_0 + a_1 f_1 + \dots + a_{n-1} f_{n-1}) - f\|_2^2. \quad (11)$$

Επειδή οι συναρτήσεις $f_0, f_1, \dots, f_{n-1}$ αποτελούν ορθοκανονικό σύστημα στον $L((-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$, γνωρίζουμε ότι η νόρμα στην (11) ελαχιστοποιείται αν και μόνο αν

$$a_k = \langle f, f_k \rangle_2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos^n(2\pi x) \cos(2\pi k x) dx \quad \text{για } k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Τα ολοκληρώματα αυτά μπορούν να υπολογιστούν σχετικά εύκολα αν γράψουμε $\cos(i\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ και κάνουμε πράξεις. Αλλά δεν χρειάζεται να γίνει κάτι τέτοιο, διότι έχουμε καταλήξει σε συγκεκριμένους τύπους για τους a_k . □