

Λύσεις μερικών ασκήσεων του τέταρτου φυλλαδίου.

1. Βρείτε τον μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης

$$x\chi_{[-1,1]}(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{αν } x < -1 \text{ ή } 1 < x \end{cases}$$

Λύση. Επειδή η συνάρτηση είναι τμηματικά συνεχής και μηδενίζεται έξω από ένα φραγμένο διάστημα, είναι ολοκληρώσιμη και έχουμε

$$\widehat{x\chi_{[-1,1]}}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} x\chi_{[-1,1]}(x)e^{-2\pi i\xi x} dx = \int_{-1}^1 xe^{-2\pi i\xi x} dx = \begin{cases} i \frac{2\pi\xi \cos(2\pi\xi) - \sin(2\pi\xi)}{2\pi^2\xi^2}, & \text{αν } \xi \neq 0 \\ 0, & \text{αν } \xi = 0 \end{cases}$$

□

2. Έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$ ώστε $\widehat{f}(\xi) = e^{-\xi^4}$ για κάθε ξ . Χωρίς να βρείτε την f , βρείτε τους μετασχηματισμούς Fourier των συναρτήσεων $f(2x)$, $f(2x-1)$, $f(2x-1)e^{-2\pi i x}$.

Λύση. Το πρόβλημα λύνεται με εφαρμογή έτοιμων τύπων. Πάντως, μπορούμε να το λύσουμε κατ' ευθείαν με αλλαγές μεταβλητής ως εξής (αποδεικνύοντας, ουσιαστικά, τους γενικούς τύπους).

Θεωρούμε γενική ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f(x)$ και την

$$g(x) = f(ax+b)e^{icx}$$

με $a \neq 0$.

Τότε, με αλλαγή μεταβλητής $t = ax+b$,

$$\begin{aligned} \widehat{g}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} f(ax+b)e^{icx}e^{-2\pi i\xi x} dx = \int_{\mathbb{R}} f(ax+b)e^{-2\pi i(\xi - \frac{c}{2\pi})x} dx \\ &= \frac{1}{|a|} \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-2\pi i(\xi - \frac{c}{2\pi})\frac{t-b}{a}} dt = \frac{1}{|a|} e^{2\pi i\frac{b}{a}(\xi - \frac{c}{2\pi})} \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-2\pi i\frac{1}{a}(\xi - \frac{c}{2\pi})t} dt \\ &= \frac{1}{|a|} e^{2\pi i\frac{b}{a}(\xi - \frac{c}{2\pi})} \widehat{f}\left(\frac{1}{a}\left(\xi - \frac{c}{2\pi}\right)\right). \end{aligned}$$

□

3. Βρείτε τους μετασχηματισμούς Fourier των συναρτήσεων xe^{-x^2} , $e^{-\pi x^2+2\pi x}$.

Λύση. Η συνάρτηση xe^{-x^2} είναι ολοκληρώσιμη. Επειδή είναι συνεχής, αρκεί να αποδείξουμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|e^{-x^2} dx$$

συγκλίνει. Έχουμε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{+\infty} xe^{-x^2} dx = - \int_0^{+\infty} \frac{de^{-x^2}}{dx} dx = 1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2} = 1.$$

Όπως στην προηγούμενη άσκηση, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε έτοιμο τύπο, διότι η xe^{-x^2} είναι η παράγωγος της $-\frac{1}{2}e^{-x^2}$, η οποία είναι, ουσιαστικά, η $e^{-\pi x^2}$, της οποίας γνωρίζουμε τον μετασχηματισμό Fourier. Θα προχωρήσουμε, όμως, σαν να μην γνωρίζουμε τύπους.

$$\begin{aligned}\widehat{xe^{-x^2}}(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2} e^{-2\pi i \xi x} dx = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{de^{-x^2}}{dx} e^{-2\pi i \xi x} dx \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2} e^{-2\pi i \xi x} + \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x^2} e^{-2\pi i \xi x} - \pi i \xi \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} e^{-2\pi i \xi x} dx \\ &= \pi i \xi \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} e^{-2\pi i \xi x} dx.\end{aligned}$$

Τώρα θα εμφανίσουμε την συνάρτηση $e^{-\pi x^2}$, οπότε κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $x = \sqrt{\pi}t$ και έχουμε

$$\pi i \xi \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} e^{-2\pi i \xi x} dx = \pi \sqrt{\pi} i \xi \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2} e^{-2\pi i \sqrt{\pi} \xi t} dt = \pi \sqrt{\pi} i \xi e^{-\pi(\sqrt{\pi} \xi)^2} = \pi \sqrt{\pi} i e^{-\pi^2 \xi^2},$$

διότι ο μετασχηματισμός Fourier της $e^{-\pi t^2}$ είναι η $e^{-\pi \xi^2}$.

Ασχοληθείτε εσείς με τον μετασχηματισμό Fourier της δεύτερης συνάρτησης. □

4. Βρείτε $f \in L^1(\mathbb{R})$ ώστε $\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\pi^2} \frac{1}{(\xi^2+1)^2}$ για κάθε ξ .

Λύση. Η συνάρτηση $\widehat{f}$ που μας δίνουν είναι ολοκληρώσιμη. Επειδή είναι συνεχής, αρκεί να ελέγξουμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\xi^2+1)^2} d\xi$$

συγκλίνει. Πράγματι,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\xi^2+1)^2} d\xi = 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{(\xi^2+1)^2} d\xi \leq 2 \int_0^1 \frac{1}{(\xi^2+1)^2} d\xi + 2 \int_1^{+\infty} \frac{1}{\xi^4} d\xi < +\infty.$$

Επομένως, αν υπάρχει τέτοια f , θα προκύπτει από τον γενικό τύπο ανακατασκευής της f από την $\widehat{f}$ όταν και οι δύο συναρτήσεις είναι ολοκληρώσιμες:

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\xi^2+1)^2} e^{2\pi i \xi x} d\xi \quad \text{για σ.κ. } x.$$

Όμως, επειδή δεν υπολογίζεται άμεσα το τελευταίο ολοκλήρωμα, βρίσκουμε έναν άλλο τρόπο να υπολογίσουμε την f .

Παρατηρούμε ότι

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\xi^2+1} \frac{1}{\pi} \frac{1}{\xi^2+1} = P_1(\xi) P_1(\xi) = \widehat{e^{-|x|}}(\xi) \widehat{e^{-|x|}}(\xi) \quad \text{για κάθε } \xi.$$

Δηλαδή,

$$\widehat{f}(\xi) = \widehat{e^{-|x|} * e^{-|x|}}(\xi) \quad \text{για κάθε } \xi$$

και, επομένως,

$$f(x) = (e^{-|x|} * e^{-|x|})(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-y|} e^{-|y|} dy = (x+1)e^{-x} \quad \text{για σ.κ. } x.$$

□

5. Αποδείξτε τις ισότητες στις ασκήσεις 8[γ] και 9[γ] του δεύτερου φυλλαδίου παίρνοντας τον μετασχηματισμό Fourier των δυο πλευρών τους.

Λύση. Έχουμε

$$\widehat{P_t * P_s}(\xi) = \widehat{P_t}(\xi) \widehat{P_s}(\xi) = e^{-t|\xi|} e^{-s|\xi|} = e^{-(t+s)|\xi|} = \widehat{P_{t+s}}(\xi) \quad \text{για κάθε } \xi.$$

Αρα

$$(P_t * P_s)(x) = P_{t+s}(x) \quad \text{για σ.κ. } x.$$

Επειδή οι συναρτήσεις $P_t * P_s$ και P_{t+s} είναι συνεχείς, η ισότητα ισχύει ταυτοτικά.

Η δεύτερη ισότητα αποδεικνύεται με τον ίδιο τρόπο. □

6. Έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$, αριθμός a και η συνάρτηση $g(x) = f(x+a) - f(x)$. Αποδείξτε ότι ο $\widehat{g}$ έχει άπειρες ρίζες.

Λύση. Έχουμε

$$\widehat{g(x)}(\xi) = \widehat{f(x+a)}(\xi) - \widehat{f(x)}(\xi) = e^{2\pi i \xi a} \widehat{f(x)}(\xi) - \widehat{f(x)}(\xi) = (e^{2\pi i \xi a} - 1) \widehat{f(x)}(\xi).$$

Αρα έχουμε ως ρίζες όλους τους ξ που μηδενίζουν την $e^{2\pi i \xi a} - 1$, δηλαδή τους

$$\xi = \frac{k}{a} \quad \text{για κάθε } k \in \mathbb{Z}.$$

□

7. Θεωρήστε, για $t > 0$, την συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{αν } x > 0 \\ 0, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$$

[α] Δείτε ότι $f \in L^1(\mathbb{R})$, υπολογίστε την $\widehat{f}$ και αποδείξτε ότι $\widehat{f} \notin L^1(\mathbb{R})$.

[β] Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 3.15, υπολογίστε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τον μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης $x^n f(x)$.

[γ] Δείτε ότι

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{-x}, & \text{αν } x > 0 \\ 0, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$$

και υπολογίστε τον μετασχηματισμό Fourier της f' . Συμφωνεί αυτό που βρήκατε με το αποτέλεσμα $2\pi i \xi \widehat{f}(\xi) = \widehat{f'}(\xi)$ που προβλέπει η Πρόταση 3.11; Γιατί;

Λύση. Επειδή η f είναι τμηματικά συνεχής, για να αποδείξουμε ότι είναι ολοκληρώσιμη αρκεί να αποδείξουμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx$$

συγκλίνει. Αυτό, όμως, είναι γνωστό: $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$.

Τώρα,

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx = \int_0^{+\infty} e^{-(1+2\pi i \xi)x} dx = \frac{1}{1+2\pi i \xi}.$$

Η $\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{1+2\pi i\xi}$ που βρήκαμε είναι συνεχής, οπότε για να δούμε αν είναι ολοκληρώσιμη αρκεί να δούμε αν συγκλίνει το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|1+2\pi i\xi|} d\xi = 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+4\pi^2\xi^2}} d\xi.$$

Όμως, για $\xi \geq 1$ έχουμε $\sqrt{1+4\pi^2\xi^2} \leq \sqrt{\xi^2+4\pi^2\xi^2} = \sqrt{1+4\pi^2}\xi$, οπότε

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+4\pi^2\xi^2}} d\xi \geq \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+4\pi^2\xi^2}} d\xi \geq \frac{1}{\sqrt{1+4\pi^2}} \int_1^{+\infty} \frac{1}{\xi} d\xi = +\infty.$$

Δεν θα ασχοληθούμε με το $[\beta]$. Για το $[\gamma]$ παρατηρούμε ότι $f' = -f$, οπότε

$$\widehat{f}'(\xi) = -\widehat{f}(\xi) = -\frac{1}{1+2\pi i\xi}.$$

Επίσης,

$$2\pi i\xi \widehat{f}(\xi) = \frac{2\pi i\xi}{1+2\pi i\xi},$$

οπότε η ισότητα $2\pi i\xi \widehat{f}(\xi) = \widehat{f}'(\xi)$ δεν ισχύει. Ο λόγος είναι ότι, για να ισχύει, η Πρόταση 3.11 απαιτεί να είναι η f' συνεχής στο $\mathbb{R}$. $\square$

8. Από την συνάρτηση με τύπο

$$\begin{cases} 1-|\xi|, & \text{αν } |\xi| \leq 1 \\ 0, & \text{αν } |\xi| \geq 1 \end{cases}$$

υπολογίστε το

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^4 dx.$$

Λύση. Ένα από τα βασικά παραδείγματα είναι το

$$\widehat{K}_1(\xi) = \begin{cases} 1-|\xi|, & \text{αν } |\xi| \leq 1 \\ 0, & \text{αν } |\xi| \geq 1 \end{cases}$$

όπου

$$K_1(x) = \frac{\sin^2(\pi x)}{\pi^2 x^2} \quad \text{για κάθε } x.$$

Τώρα, από την ταυτότητα του Plancherel έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}} |K_1(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{K}_1(\xi)|^2 d\xi,$$

δηλαδή

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right)^4 dx = \int_{-1}^1 (1-|\xi|)^2 d\xi = \frac{2}{3},$$

οπότε

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right)^4 dx = \frac{1}{3}$$

και, με αλλαγή μεταβλητής $t = \pi x$,

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^4 dx = \frac{\pi}{3}.$$

Αν δεν βρίσκουμε το συγκεκριμένο παράδειγμα, μπορούμε να θεωρήσουμε κατ' ευθείαν τη συνάρτηση

$$f(\xi) = \begin{cases} 1 - |\xi|, & \text{αν } |\xi| \leq 1 \\ 0, & \text{αν } |\xi| \geq 1 \end{cases}$$

η οποία είναι συνεχής και μηδενίζεται έξω από το διάστημα $[-1, 1]$ και να υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό Fourier

$$\widehat{f}(x) = \int_{-1}^1 (1 - |\xi|) e^{-2\pi i \xi x} d\xi = 2 \int_0^1 (1 - \xi) \cos(2\pi \xi x) d\xi = \frac{\sin^2(\pi x)}{\pi^2 x^2} \quad \text{για κάθε } x.$$

Κατόπιν, χρησιμοποιούμε την ταυτότητα του Plancherel όπως και πριν. □

9. Υπάρχει $f \in L^1(\mathbb{R})$, $f \neq 0$ ώστε $f * f = f$;

Λύση. Έστω ότι υπάρχει τέτοια f . Τότε

$$\widehat{f}(\xi) \widehat{f}(\xi) = \widehat{f}(\xi) \quad \text{για κάθε } \xi$$

και, επομένως,

$$\widehat{f}(\xi) = 0 \quad \text{ή} \quad \widehat{f}(\xi) = 1 \quad \text{για κάθε } \xi.$$

Γνωρίζουμε ότι η $\widehat{f}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, οπότε αν σε κάποιο σημείο η $\widehat{f}$ έχει τιμή 0 και σε κάποιο άλλο σημείο έχει τιμή 1, θα πρέπει η $\widehat{f}$ να έχει και όλες τις ενδιάμεσες τιμές. Άρα η $\widehat{f}$ είναι είτε σταθερή 0 στο $\mathbb{R}$ είτε σταθερή 1 στο $\mathbb{R}$. Η δεύτερη περίπτωση αποκλείεται, διότι $\widehat{f}(\xi) \rightarrow 0$ όταν $\xi \rightarrow \pm\infty$. Άρα πρέπει η $\widehat{f}$ να είναι σταθερή 0 στο $\mathbb{R}$ και, επομένως, η f πρέπει να είναι η μηδενική συνάρτηση. Αυτή είναι η μοναδική λύση της $f * f = f$ στον $f \in L^1(\mathbb{R})$.

Άρα η απάντηση στο ερώτημα του προβλήματος είναι : όχι. □

10. Βρείτε λύσεις $f \in L^1(\mathbb{R})$ των παρακάτω ολοκληρωτικών εξισώσεων, παίρνοντας μετασχηματισμούς Fourier των δυο πλευρών κάθε εξίσωσης.

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f(x-y) e^{-|y|} dy &= \frac{4}{3} e^{-|x|} - \frac{2}{3} e^{-2|x|}, & \int_{[-1,1]} f(x-y) dy &= e^{-|x-1|} - e^{-|x+1|}, \\ \int_{\mathbb{R}} f(x-y) e^{-|y|} dy &= e^{-\pi x^2}, & \int_{\mathbb{R}} f(x-y) e^{-|y|} dy &= (1+|x|) e^{-|x|}, \\ \int_{\mathbb{R}} f(x-y) e^{-ay^2} dy &= e^{-bx^2}, & f(x) &= e^{-|x|} + \frac{1}{2} e^x \int_{[x,+\infty)} e^{-y} f(y) dy. \end{aligned}$$

Λύση. Θα λύσουμε μόνο την πρώτη ολοκληρωτική εξίσωση.

Παρατηρούμε ότι η αριστερή πλευρά της εξίσωσης είναι η συνέλιξη της f με τη συνάρτηση $e^{-|x|}$ της οποίας ο μετασχηματισμός Fourier είναι η συνάρτηση $P_1(\xi) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\xi^2+1}$. Στην δεξιά πλευρά εμφανίζεται και η συνάρτηση $e^{-2|x|} = e^{-|2x|}$ της οποίας ο μετασχηματισμός Fourier είναι η συνάρτηση $P_2(\xi) = \frac{1}{2} P_1\left(\frac{\xi}{2}\right) = \frac{1}{\pi} \frac{2}{\xi^2+4}$.

Παίρνοντας μετασχηματισμό Fourier των δυο πλευρών της εξίσωσης, βρίσκουμε

$$\widehat{f}(\xi) \frac{1}{\pi} \frac{1}{\xi^2+1} = \frac{4}{3} \frac{1}{\pi} \frac{1}{\xi^2+1} - \frac{2}{3} \frac{1}{\pi} \frac{2}{\xi^2+4} \quad \text{για κάθε } \xi.$$

Λύνουμε:

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{4}{\xi^2+4} = 2\pi \frac{1}{\pi} \frac{2}{\xi^2+4} = 2\pi \widehat{e^{-2|x|}}(\xi) \quad \text{για κάθε } \xi.$$

Άρα

$$f(x) = e^{-2|x|} \quad \text{για σ.κ. } x.$$

□