Ασκήσεις στην Αρμονική Ανάλυση.

Πρώτο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Σχεδιάστε τα γραφήματα και βρείτε τους συντελεστές Fourier των συναρτήσεων:

$$f(t) = \begin{cases} 1, & |t| < \delta \\ 0, & \delta < |t| \le 1/2 \end{cases} \qquad g(t) = \begin{cases} 1 - (|t|/\delta), & |t| \le \delta \\ 0, & \delta < |t| \le 1/2 \end{cases}$$

$$h(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < \delta \\ -1, & -\delta < t < 0 \\ 0, & \delta < |t| < 1/2 \end{cases}$$

2. Αν η k είναι συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ ή στο $\mathbb{Z}$, συμβολίζουμε με $\widetilde{k}$ την ανάκλαση της k ως προς το 0 και με $\overline{k}$ την συζυγή της k. Δηλαδή $\widetilde{k}(a) = k(-a)$ και $\overline{k}(a) = \overline{k(a)}$ για κάθε a στο $\mathbb{R}$ ή στο $\mathbb{Z}$.

   Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$.

   (i) Αποδείξτε ότι $\widehat{\widetilde{f}} = \widetilde{\widehat{f}}$.

   (ii) Αποδείξτε ότι $\widehat{\overline{f}} = \overline{\widetilde{\widehat{f}}}$.

   (iii) Αποδείξτε ότι η f είναι άρτια αν και μόνο αν η ακολουθία $\widehat{f}$ είναι άρτια.

   (iv) Αποδείξτε ότι η f είναι περιττή αν και μόνο αν η ακολουθία $\widehat{f}$ είναι περιττή.

   (v) Αποδείξτε ότι η f είναι πραγματική αν και μόνο αν $\widetilde{\widehat{f}} = \overline{\widehat{f}}$.

3. Αποδείξτε ότι $\lim_{k\to\pm\infty} e^{-2\pi i k x} = 0$ ασθενώς-$*$ στον $L^p(\mathbb{T})$ για $1 < p \le +\infty$ και ασθενώς στον $L^p(\mathbb{T})$ για $1 \le p < +\infty$.

4. (i) Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$ ώστε $f * f = 0$. Βρείτε την f.

   (ii) Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$ ώστε $f * f = f$. Βρείτε την f.

5. Δίνεται $g \in L^1(\mathbb{T})$ και θέλουμε να βρούμε $f \in L^1(\mathbb{T})$ έτσι ώστε $f * g = f$.

   (i) Αποδείξτε ότι κάθε λύση f είναι εκθετικό πολυώνυμο.

   (ii) Αποδείξτε ότι, ανάλογα με την δοσμένη g, το πρόβλημα έχει είτε ακριβώς μία λύση είτε άπειρες λύσεις. Περιγράψτε όλες τις λύσεις.

6. Θεωρήστε την 1-περιοδική συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} 1 - 2x, & \text{αν } 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 0, & \text{αν } \frac{1}{2} \le x < 1 \end{cases}$

   (i) Σχεδιάστε το γράφημα της f στο $\mathbb{R}$.

   (ii) Βρείτε την σειρά Fourier της f καθώς και το άθροισμά της σε κάθε $x \in \mathbb{R}$.

   (iii) Από το άθροισμα της σειράς Fourier στο $x = 0$ αποδείξτε ότι $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ και μετά ότι $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

7. Αν $f \in L^1(\mathbb{T})$ και $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(k)| < +\infty$, αποδείξτε ότι $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k) e^{2\pi i k x}$ για σχεδόν κάθε $x \in \mathbb{R}$ και ότι η f είναι σχεδόν παντού ίση με μία συνεχή συνάρτηση στο $\mathbb{R}$.

8. (i) Έστω $n \ge 0$ και $f \in C^n(\mathbb{T})$ (δηλαδή η f έχει συνεχείς παραγώγους τάξης $\le n$ στο $\mathbb{R}$).

   Αποδείξτε ότι $\widehat{f^{(n)}}(k) = (2\pi i k)^n \widehat{f}(k)$ για κάθε k.

   Αποδείξτε ότι $\sup_k |k^n \widehat{f}(k)| < +\infty$.

   Αποδείξτε ότι $k^n \widehat{f}(k) \to 0$ όταν $k \to \pm\infty$.

   (ii) Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$, $n \ge 0$ και έστω $\sup_k |k^{n+2} \widehat{f}(k)| < +\infty$. Αποδείξτε ότι η f είναι σχεδόν παντού ίση με μία συνάρτηση στον $C^n(\mathbb{T})$.

(iii) Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$. Αποδείξτε ότι η f είναι σχεδόν παντού ίση με μία συνάρτηση στον $C^\infty(\mathbb{T})$ αν και μόνο αν $\sup_k |k^n \widehat{f}(k)| < +\infty$ για κάθε $n \geq 0$.

9. (i) Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$ μονότονη και φραγμένη στο $[0,1)$. Αποδείξτε ότι $\sup_k |k\, \widehat{f}(k)| < +\infty$.

   (ii) Έστω $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ και έστω ότι $\sup_k |k\, \widehat{f}(k)| = K < +\infty$. Παρατηρήστε ότι

   $$s_n(f)(x) = \sigma_n(f)(x) + \sum_{k=-n}^{n} \tfrac{|k|}{n+1}\, \widehat{f}(k) e^{2\pi i k x}$$

   και αποδείξτε ότι

   $$\sup_n \|s_n(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty + 2K.$$

   (iii) Θεωρήστε την $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ με $f(x) = x$ για $x \in [0,1)$ και αποδείξτε ότι

   $$\sup_n \Big\| \sum_{k=1}^{n} \tfrac{\sin 2\pi k x}{k} \Big\|_\infty < +\infty.$$

   (iv) Έστω περιττή $f \in L^1(\mathbb{T})$. Αποδείξτε ότι

   $$\sup_n \Big| \sum_{k=1}^{n} \tfrac{\widehat{f}(k)}{k} \Big| < +\infty.$$

   (v) Θεωρήστε την περιττή $(a_k) \in c_0(\mathbb{Z})$ με $a_0 = 0$ και $a_k = \frac{1}{\log(k+1)}$ για $k \geq 1$. Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει $f \in L^1(\mathbb{T})$ ώστε να ισχύει $\widehat{f}(k) = a_k$ για κάθε k. Άρα ο μετασχηματισμός Fourier $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{T}) \to c_0(\mathbb{Z})$ δεν είναι επί.

   (vi) Αν υπήρχε $f \in L^1(\mathbb{T})$ ώστε να ισχύει $\widehat{f}(k) = a_k$ για κάθε k (όπου (a_k) είναι η ακολουθία στο (v)), τότε η σειρά Fourier της f θα ήταν η

   $$\sum_{k\in\mathbb{Z}, k\neq 0} \tfrac{k}{|k|}\, \tfrac{e^{2\pi i k x}}{\log(|k|+1)}.$$

   Χρησιμοποιώντας ένα γνωστό κριτήριο σύγκλισης σειρών, αποδείξτε ότι η σειρά αυτή συγκλίνει για κάθε x (αναφερόμαστε στα συμμετρικά μερικά αθροίσματα της σειράς).

10. Έστω $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ και $\|\tau_y(f) - f\|_\infty \to 0$ όταν $y \to 0$. Χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις $\sigma_n(f)$, αποδείξτε ότι $f \in C(\mathbb{T})$ (δηλαδή ότι η f είναι σχεδόν παντού ίση με μία συνεχή συνάρτηση).

11. Έστω $k_\alpha \in L^1(\mathbb{T})$ ($\alpha \in A \subseteq \mathbb{R}$) μία οικογένεια συναρτήσεων με τις εξής ιδιότητες:

    (i) $\int_{-1/2}^{1/2} k_\alpha(x)\, dx = 1$ για κάθε $\alpha \in A$.

    (ii) $\sup_\alpha \|k_\alpha\|_1 < +\infty$.

    (iii) $\int_{\delta \leq |x| \leq 1/2} |k_\alpha(x)|\, dx \to 0$ όταν $\alpha \to \alpha_0$ για κάθε $\delta > 0$.

    Τότε λέμε ότι η οικογένεια k_α ($\alpha \in A \subseteq \mathbb{R}$) αποτελεί έναν *πυρήνα αθροισιμότητας*.

    Αποδείξτε ότι, αν $f \in L^p(\mathbb{T})$, $1 \leq p < +\infty$, τότε $\|f * k_\alpha - f\|_p \to 0$ όταν $\alpha \to \alpha_0$ και ότι, αν $f \in C(\mathbb{T})$, τότε $\|f * k_\alpha - f\|_\infty \to 0$ όταν $\alpha \to \alpha_0$.

    Παραδείγματα πυρήνων αθροισιμότητας είναι οι πυρήνες Fejer και οι πυρήνες Poisson.

12. Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$ και $g \in L^\infty(\mathbb{T})$. Χρησιμοποιώντας την πυκνότητα των εκθετικών πολυωνύμων στον $L^1(\mathbb{T})$, αποδείξτε ότι

    $$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f(x) g(nx)\, dx = \widehat{f}(0)\widehat{g}(0).$$