## Ασκήσεις στην Αρμονική Ανάλυση.

### Τρίτο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. (i) Υπάρχει $f \in L^1(\mathbb{R})$ με $\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{1+e^{-\xi}}$ για κάθε $\xi$;

   (ii) Υπάρχει $f \in L^1(\mathbb{R})$ με $\widehat{f}(\xi) = \frac{|\xi|}{\xi+\xi^4}$ για κάθε $\xi$;

2. (i) Θεωρήστε την $f(x) = \frac{1}{1+x^8}$ και βρείτε $g \in L^1(\mathbb{R})$ με $\widehat{g}(\xi) = \widehat{f}(\xi+1)e^{2\pi i\xi}$ για κάθε $\xi$.

   (ii) Θεωρήστε την $f(x) = \frac{1}{1+x+x^2}$ και βρείτε $g \in L^1(\mathbb{R})$ με $\widehat{g}(\xi) = \widehat{f}(\xi-1)\widehat{f}(\xi+1)$ για κάθε $\xi$.

3. (i) Αποδείξτε ότι
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$
   *Υπόδειξη:* Χρησιμοποιήστε τον τύπο του Cauchy για την αναλυτική συνάρτηση $\frac{e^{iz}}{z}$ στην καμπύλη $\gamma_{\epsilon,R}$ η οποία διαγράφεται με τη θετική φορά και αποτελείται διαδοχικά από το ευθ. τμήμα $[\epsilon, R]$, το ημικύκλιο στο άνω ημιεπίπεδο με κέντρο $0$ και ακτίνα $R$, το ευθ.τμήμα $[-R,-\epsilon]$ και το ημικύκλιο στο άνω ημιεπίπεδο με κέντρο $0$ και ακτίνα $\epsilon$. Κατόπιν, θεωρήστε το όριο όταν $\epsilon \to 0+$ και $R \to +\infty$.

   (ii) Έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$ και $R > 0$. Αποδείξτε ότι
$$\int_{-R}^{R} \widehat{f}(\xi)e^{2\pi i x\xi}\, d\xi = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} f(x+t)\frac{\sin 2\pi Rt}{t}\, dt.$$

   (iii) **Κριτήριο Dini**. Έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$ και έστω $\int_{-\delta}^{\delta} \left|\frac{f(x+t)-f(x)}{t}\right| dt < +\infty$ για κάποιο $\delta > 0$. Αποδείξτε ότι
$$\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} \widehat{f}(\xi)e^{2\pi i x\xi}\, d\xi = f(x).$$

   (iv) Λέμε ότι η $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ έχει φραγμένη κύμανση στο $[a,b]$ αν υπάρχει $M$ ώστε
$$|f(t_0)-f(t_1)| + |f(t_1)-f(t_2)| + \cdots + |f(t_{n-2})-f(t_{n-1})| + |f(t_{n-1})-f(t_n)| \leqslant M$$
   για κάθε $n \geqslant 1$ και κάθε διαμέριση $t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n$ του $[a,b]$.
   Το συνολο των συναρτήσεων με φραγμένη κύμανση στο $[a,b]$ είναι γραμμικός χώρος και κάθε $f$ μονότονη στο $[a,b]$ έχει φραγμένη κύμανση στο $[a,b]$. Άρα η διαφορά δύο αυξουσών συναρτήσεων στο $[a,b]$ είναι συνάρτηση με φραγμένη κύμανση στο $[a,b]$.
   Ορίζουμε $x^+ = \max\{x, 0\}$, $x^- = \max\{-x, 0\}$, οπότε $x^+ + x^- = |x|$ και $x^+ - x^- = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
   Έστω πραγματική $f$ με φραγμένη κύμανση στο $[a,b]$. Για $x \in (a,b]$ ορίζουμε
$$V_+(x) = \sup\Big\{\sum_{j=1}^{n}(f(t_{j-1})-f(t_j))^+ \,\Big|\, n \geqslant 1, a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = x\Big\},$$
$$V_-(x) = \sup\Big\{\sum_{j=1}^{n}(f(t_{j-1})-f(t_j))^- \,\Big|\, n \geqslant 1, a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = x\Big\}.$$
   Επίσης, ορίζουμε $V_+(a) = V_-(a) = 0$.
   Αποδείξτε ότι οι $V_+$ και $V_-$ είναι αύξουσες στο $[a,b]$ και ότι
$$V_+(x) - V_-(x) = f(x) - f(a) \qquad \text{για κάθε } x \in [a,b].$$
   Άρα κάθε πραγματική συνάρτηση με φραγμένη κύμανση στο $[a,b]$ είναι διαφορά δύο αυξουσών συναρτήσεων στο $[a,b]$.

   (v) **Κριτήριο Jordan**. Έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$ και έστω ότι η $f$ έχει φραγμένη κύμανση στο διάστημα $[x-\delta, x+\delta]$ για κάποιο $\delta > 0$. Αποδείξτε ότι
$$\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} \widehat{f}(\xi)e^{2\pi i x\xi}\, d\xi = \frac{f(x-)+f(x+)}{2}.$$

4. Έστω $f, \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Γνωρίζουμε ότι $f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x\cdot\xi}\, d\xi$ για σ.κ. $x$. Αποδείξτε ότι η ισότητα ισχύει για κάθε $x$ το οποίο είναι σημείο συνέχειας της $f$.

5. Αν η $k$ είναι συνάρτηση στο $\mathbb{R}^d$, συμβολίζουμε με $\widetilde{k}$ την ανάκλαση της $k$ ως προς το $0$ και με $\overline{k}$ την συζυγή της $k$. Δηλαδή $\widetilde{k}(a) = k(-a)$ και $\overline{k}(a) = \overline{k(a)}$ για κάθε $a \in \mathbb{R}^d$.
   Έστω $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$.
   (i) Αποδείξτε ότι $\widehat{\widetilde{f}} = \widetilde{\widehat{f}}$.
   (ii) Αποδείξτε ότι $\widehat{\overline{f}} = \overline{\widetilde{\widehat{f}}}$.
   (iii) Αποδείξτε ότι η $f$ είναι άρτια αν και μόνο αν η $\widehat{f}$ είναι άρτια.
   (iv) Αποδείξτε ότι η $f$ είναι περιττή αν και μόνο αν η $\widehat{f}$ είναι περιττή.
   (v) Αποδείξτε ότι η $f$ είναι πραγματική αν και μόνο αν $\widetilde{\widehat{f}} = \overline{\widehat{f}}$.
   (vi) Αποδείξτε ότι η $f$ είναι ακτινική (δηλαδή, αν $|x'| = |x''|$ τότε $f(x') = f(x'')$) αν και μόνο αν η $\widehat{f}$ είναι ακτινική.

6. Αποδείξτε ότι $\lim_{\xi\to\infty} e^{-2\pi i\xi\cdot x} = 0$ ασθενώς-$*$ στον $L^\infty(\mathbb{R}^d)$.

7. (i) Έστω $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ ώστε $f * f = 0$. Βρείτε την $f$.
   (ii) Έστω $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ ώστε $f * f = f$. Βρείτε την $f$.
   (iii) Βρείτε $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $f \neq 0$, $g \neq 0$ ώστε $f * g = 0$.

8. Αποδείξτε ότι η άλγεβρα $L^1(\mathbb{R}^d)$ δεν έχει μοναδιαίο στοιχείο.

9. Έστω $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $f - f * g = g$ έχει λύση $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ αν και μόνο αν ισχύει $\widehat{g}(\xi) \neq 1$ για κάθε $\xi$.

10. (i) Έστω $D^\alpha f \in C(\mathbb{R}^d) \cap L^1(\mathbb{R}^d)$ όταν $|\alpha| \leqslant n$.
    Αποδείξτε ότι $\sup_\xi |\xi|^n\, |\widehat{f}(\xi)| < +\infty$.
    Αποδείξτε ότι $\lim_{\xi\to\infty} |\xi|^n\, |\widehat{f}(\xi)| = 0$.
    (ii) Έστω $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ και $\sup_\xi |\xi|^{n+d+1}\, |\widehat{f}(\xi)| < +\infty$. Αποδείξτε ότι η $f$ είναι σ.π. ίση με μία $g$ τέτοια ώστε $D^\alpha g \in C(\mathbb{R}^d) \cap L^1(\mathbb{R}^d)$ όταν $|\alpha| \leqslant n$.
    (iii) Έστω $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Αποδείξτε ότι η $f$ είναι σ.π. ίση με μία $g$ τέτοια ώστε $D^\alpha g \in C(\mathbb{R}^d) \cap L^1(\mathbb{R}^d)$ για κάθε $\alpha$ αν και μόνο αν $\sup_\xi |\xi|^n\, |\widehat{f}(\xi)| < +\infty$ για κάθε $n$.

11. (i) Έστω περιττή $f \in L^1(\mathbb{R})$. Αποδείξτε ότι

$$\sup_{R>1} \Big| \int_1^R \tfrac{\widehat{f}(\xi)}{\xi}\, d\xi \Big| < +\infty.$$

    (ii) Βρείτε περιττή $g \in C_0(\mathbb{R})$ με $g(\xi) = \frac{1}{\log(\xi+1)}$ για $\xi \geqslant 1$. Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει $f \in L^1(\mathbb{R})$ με $\widehat{f}(\xi) = g(\xi)$ για κάθε $\xi$. Συμπεράνατε ότι ο μετασχηματισμός Fourier $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \to C_0(\mathbb{R})$ δεν είναι επί.
    (iii) Αποδείξτε ότι ο μετασχηματισμός Fourier $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^d) \to C_0(\mathbb{R}^d)$ δεν είναι επί.

12. Έστω $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ και $\|\tau_y(f) - f\|_\infty \to 0$ όταν $y \to 0$. Χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις $f * \epsilon_t(G)$ (όπου $G(x) = e^{-\pi|x|^2}$ είναι η συνάρτηση του Gauss), αποδείξτε ότι η $f$ είναι σ.π. ίση με μία συνάρτηση ομοιόμορφα συνεχή στο $\mathbb{R}^d$.

13. Έστω $k_\alpha \in L^1(\mathbb{R}^d)$ ($\alpha \in A \subseteq \mathbb{R}$) μία οικογένεια συναρτήσεων με τις εξής ιδιότητες:
    (i) $\int_{\mathbb{R}^d} k_\alpha(x)\, dx = 1$ για κάθε $\alpha \in A$.
    (ii) $\sup_\alpha \|k_\alpha\|_1 < +\infty$.
    (iii) $\int_{\delta\leqslant|x|} |k_\alpha(x)|\, dx \to 0$ όταν $\alpha \to \alpha_0$ για κάθε $\delta > 0$.

Τότε λέμε ότι η οικογένεια $k_\alpha$ ($\alpha \in A \subseteq \mathbb{R}$) αποτελεί έναν *πυρήνα αθροισιμότητας*.

Αποδείξτε ότι, αν $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leqslant p < +\infty$, τότε $\|f * k_\alpha - f\|_p \to 0$ όταν $\alpha \to \alpha_0$ και ότι, αν η $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ είναι ομοιόμορφα συνεχής, τότε $\|f * k_\alpha - f\|_\infty \to 0$ όταν $\alpha \to \alpha_0$.

Παραδείγματα πυρήνων αθροισιμότητας είναι οι $\epsilon_t(g)$ (με $t > 0$ και $t \to 0+$) για οποιαδήποτε $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ με $\int_{\mathbb{R}^d} g(x)\,dx = 1$.

14. Έστω $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

(i) Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $\|\tau_{t'}(f) - \tau_{t''}(f)\|_1 < \epsilon$ όταν $|t' - t''| < \delta$. Διαμερίζουμε το $\mathbb{R}^d$ σε μικρούς κύβους $Q_1, Q_2, \ldots$ διαμέτρου $< \delta$ και επιλέγουμε $t_k \in Q_k$ για $k = 1, 2, \ldots$. Παρατηρήστε ότι

$$f * g(x) = \textstyle\sum_{k=1}^{+\infty} (\int_{Q_k} g(t)\,dt)\, \tau_{t_k}(f)(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{Q_k} (\tau_t(f)(x) - \tau_{t_k}(f)(x)) g(t)\,dt$$

(όπου οι σειρές συγκλίνουν στον $L^1(\mathbb{R}^d)$) και άρα

$$\big\|f * g - \textstyle\sum_{k=1}^{+\infty} c_k \tau_{t_k}(f)\big\|_1 \leqslant \epsilon \|g\|_1$$

όπου $c_k = \int_{Q_k} g(t)\,dt$ για $k = 1, 2, \ldots$.

(ii) Συμπεράνατε ότι η $f * g$ είναι όριο στον $L^1(\mathbb{R}^d)$ (πεπερασμένων) γραμμικών συνδυασμών μεταφορών της $f$.

15. Γνωρίζουμε ότι ο $L^1(\mathbb{R}^d)$ είναι μεταθετική άλγεβρα Banach.

(i) Αν το $I$ είναι ιδεώδες του $L^1(\mathbb{R}^d)$, αποδείξτε ότι και το $\mathrm{cl}\, I$ είναι ιδεώδες του $L^1(\mathbb{R}^d)$.

(ii) Αποδείξτε ότι τομή ιδεωδών του $L^1(\mathbb{R}^d)$ είναι ιδεώδες του $L^1(\mathbb{R}^d)$ και, κατόπιν, με βάση το (i) αποδείξτε ότι για κάθε $A \subseteq L^1(\mathbb{R}^d)$ υπάρχει ελάχιστο κλειστό ιδεώδες του $L^1(\mathbb{R}^d)$, ας το συμβολίσουμε $[A]$, το οποίο περιέχει το $A$.

(iii) Αποδείξτε ότι $f * \tau_y(F_n) = \tau_y(f) * F_n \to \tau_y(f)$ στον $L^1(\mathbb{R}^d)$ και συμπεράνατε ότι το $[\{f\}]$ περιέχει όλες τις μεταφορές της $f$ και κατόπιν ότι ο κλειστός γραμμικός υπόχωρος του $L^1(\mathbb{R}^d)$ ο οποίος παράγεται από τις μεταφορές της $f$ περιέχεται στο $[\{f\}]$, δηλαδή:

$$\mathrm{cl}\big\{ \textstyle\sum_{k=1}^{m} \lambda_k \tau_{y_k}(f) \,\big|\, m \in \mathbb{N}, y_1, \ldots, y_m \in \mathbb{R}^d, \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{C} \big\} \subseteq [\{f\}]. \tag{1}$$

(iv) Χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα της άσκησης 14 για να συμπεράνετε ότι το αριστερό μέρος της (1) είναι κλειστό ιδεώδες του $L^1(\mathbb{R}^d)$ και, επομένως, ότι ισχύει ο αντίστροφος εγκλεισμός στην (1) και, επομένως, ότι

$$\mathrm{cl}\big\{ \textstyle\sum_{k=1}^{m} \lambda_k \tau_{y_k}(f) \,\big|\, m \in \mathbb{N}, y_1, \ldots, y_m \in \mathbb{R}^d, \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{C} \big\} = [\{f\}].$$

(v) Έστω $A \subseteq L^1(\mathbb{R}^d)$. Λέμε ότι το $A$ είναι αναλλοίωτο ως προς μεταφορές αν για κάθε $f \in A$ και κάθε $y$ ισχύει $\tau_y(f) \in A$. Αποδείξτε ότι ένας κλειστός γραμμικός υπόχωρος $V$ του $L^1(\mathbb{R}^d)$ είναι κλειστό ιδεώδες του $L^1(\mathbb{R}^d)$ αν και μόνο αν ο $V$ είναι αναλλοίωτος ως προς μεταφορές.

16. (i) Έστω $u$ ολόμορφη στον δίσκο $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < r\}$ με $0 < r \leqslant +\infty$.

Αν $u(0) = 0$, αποδείξτε ότι για κάθε $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ με $\|f\|_1 < r$ η $u(\widehat{f})$ είναι μετασχηματισμός Fourier, δηλαδή ότι υπάρχει $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ έτσι ώστε να ισχύει

$$u(\widehat{f}(\xi)) = \widehat{g}(\xi) \qquad \text{για κάθε } \xi.$$

*Υπόδειξη:* Έστω $u(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k z^k$ η σειρά Taylor της $u$. Αν $f^{k*} = f * \cdots * f$ ($k$ φορές), τότε αποδείξτε ότι η $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k f^{k*}$ συγκλίνει στον $L^1(\mathbb{R}^d)$.

Αν $u(0) \neq 0$, αποδείξτε ότι για κάθε $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ με $\|f\|_1 < r$ και για κάθε $R > 0$ υπάρχει $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ έτσι ώστε να ισχύει

$$u(\widehat{f}(\xi)) = \widehat{g}(\xi) \qquad \text{για } |\xi| \leqslant R.$$

*Υπόδειξη:* Χρησιμοποιήστε το (i) για την $u(z)-u(0)$ και θεωρήστε $\phi \in L^1(\mathbb{R}^d)$ με $\widehat{\phi}(\xi)=1$ για $|\xi|\leqslant 1$. Υπάρχει τέτοια $\phi$;

(ii) Έστω $f\in L^1(\mathbb{R}^d)$ με $\widehat{f}(0)=\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx=0$. Αποδείξτε ότι για κάθε $r>0$ υπάρχει $h\in L^1(\mathbb{R}^d)$ ώστε $\|h\|_1<r$, ώστε να ισχύει

$$\widehat{h}(\xi)=\begin{cases}\widehat{f}(\xi) & \text{για κάθε } \xi \text{ σε κάποια περιοχή του } 0\\ 0 & \text{για κάθε } \xi \text{ για το οποίο ισχύει } \widehat{f}(\xi)=0\end{cases}$$

*Υπόδειξη:* Έστω $h=f*\epsilon_t(\phi)$ με αρκετά μεγάλο $t>0$, όπου $\phi\in L^1(\mathbb{R}^d)$ με $\widehat{\phi}(\xi)=1$ για $|\xi|\leqslant 1$.

(iii) Έστω $u$ ολόμορφη στο $z_0\in\mathbb{C}$ και έστω $\xi_0\in\mathbb{R}^d$. Αποδείξτε ότι για κάθε $f\in L^1(\mathbb{R}^d)$ με $\widehat{f}(\xi_0)=z_0$ υπάρχει $g\in L^1(\mathbb{R}^d)$ έτσι ώστε να ισχύει

$$u(\widehat{f}(\xi))=\widehat{g}(\xi)\qquad \text{για κάθε } \xi \text{ σε κάποια περιοχή του } \xi_0.$$

*Υπόδειξη:* Θεωρήστε πρώτα την περίπτωση $\xi_0=z_0=0$ και χρησιμοποιήστε τα αποτελέσματα των (i) και (ii).

(iv) Έστω $u$ ολόμορφη στο ανοικτό $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ και έστω συμπαγές $K\subseteq\mathbb{R}^d$. Αποδείξτε ότι για κάθε $f\in L^1(\mathbb{R}^d)$ με $\widehat{f}(K)\subseteq\Omega$ υπάρχει $g\in L^1(\mathbb{R}^d)$ έτσι ώστε να ισχύει

$$u(\widehat{f}(\xi))=\widehat{g}(\xi)\qquad \text{για κάθε } \xi\in K.$$

*Υπόδειξη:* Βάσει του (iii), για κάθε $\eta\in K$ υπάρχει $g_\eta\in L^1(\mathbb{R}^d)$ ώστε να ισχύει $u(\widehat{f}(\xi))=\widehat{g_\eta}(\xi)$ για κάθε $\xi$ σε κάποια ανοικτή περιοχή $U_\eta$ του $\eta$. Καλύψτε το $K$ με πεπερασμένου πλήθους περιοχές $U_{\eta_1},\dots,U_{\eta_m}$ και χρησιμοποιήστε (χωρίς απόδειξη) το εξής από την πραγματική ανάλυση: υπάρχουν $\psi_1,\dots,\psi_m$ στον $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ ώστε να ισχύει

$$\psi_1(\xi)+\cdots+\psi_m(\xi)=1\qquad \text{για κάθε } \xi\in K$$

και ώστε για κάθε $j=1,\dots,m$ να ισχύει

$$\psi_j(\xi)=0\qquad \text{για κάθε } \xi\notin U_{\eta_j}.$$

*Ειδική περίπτωση*: Έστω συμπαγές $K\subseteq\mathbb{R}^d$. Τότε για κάθε $f\in L^1(\mathbb{R}^d)$ με $\widehat{f}(\xi)\neq 0$ για κάθε $\xi\in K$ υπάρχει $g\in L^1(\mathbb{R}^d)$ έτσι ώστε να ισχύει

$$\widehat{g}(\xi)=\frac{1}{\widehat{f}(\xi)}\qquad \text{για κάθε } \xi\in K.$$

17. (i) Έστω $f\in L^1(\mathbb{R}^d)$ και $\widehat{f}(\xi)\neq 0$ για κάθε $\xi$. Από την άσκηση 16(iv) συνεπάγεται ότι για κάθε $n\in\mathbb{N}$ υπάρχει $g_n\in L^1(\mathbb{R}^d)$ ώστε να ισχύει $\widehat{g_n}(\xi)=\frac{1}{\widehat{f}(\xi)}$ για $|\xi|\leqslant n$. Παρατηρήστε ότι $\widehat{F_n}(\xi)\widehat{g_n}(\xi)\widehat{f}(\xi)=\widehat{F_n}(\xi)$ για κάθε $\xi$ και άρα

$$F_n*g_n*f=F_n.$$

Τέλος, για κάθε $h\in L^1(\mathbb{R}^d)$ ισχύει

$$(h*F_n*g_n)*f=h*F_n\to h\qquad \text{στον } L^1(\mathbb{R}^d)$$

και γνωρίζουμε από την άσκηση 14 ότι η $(h*F_n*g_n)*f$ είναι στην κλειστότητα των γραμμικών συνδυασμών των μεταφορών της $f$ στον $L^1(\mathbb{R}^d)$.

(ii) Αποδείξτε το **Θεώρημα του Wiener**: Αν $f\in L^1(\mathbb{R}^d)$ και ισχύει $\widehat{f}(\xi)\neq 0$ για κάθε $\xi$, τότε οι γραμμικοί συνδυασμοί των μεταφορών της $f$ είναι πυκνοί στον $L^1(\mathbb{R}^d)$.

18. (i) Έστω $\xi\in\mathbb{R}^d$ και

$$M_\xi=\{f\in L^1(\mathbb{R}^d)\mid \widehat{f}(\xi)=0\}.$$

Αποδείξτε ότι το $M_\xi$ είναι μέγιστο γνήσιο κλειστό ιδεώδες του $L^1(\mathbb{R}^d)$.

(ii) Έστω $I$ ένα γνήσιο κλειστό ιδεώδες του $L^1(\mathbb{R}^d)$ και έστω ότι για κάθε $\xi$ υπάρχει $g_\xi\in I$ με $\widehat{g_\xi}(\xi)\neq 0$. Έστω $n\in\mathbb{N}$. Για κάθε $\xi\in\mathbb{R}^d$ με $|\xi|\leqslant n$ θεωρούμε $h_\xi=g_\xi*\widetilde{\overline{g_\xi}}$ οπότε ισχύει

$\widehat{h_\xi} \geqslant 0$ στο $\mathbb{R}^d$ και $\widehat{h_\xi} > 0$ σε μια περιοχή $V_\xi$ του $\xi$. Θεωρώντας μία πεπερασμένη κάλυψη της μπάλας $\{\xi \,|\, |\xi| \leqslant n\}$ από τέτοιες περιοχές $V_{\xi_1}, \ldots, V_{\xi_m}$ πάρτε την $f_n = \sum_{k=1}^m h_{\xi_k}$ και τότε $f_n \in I$ και $\widehat{f_n}(\xi) \neq 0$ για $|\xi| \leqslant n$. Συνεχίστε όπως στο (i) της άσκησης 17, με την $f_n$ στη θέση της $f$, και αποδείξτε ότι κάθε $h \in L^1(\mathbb{R}^d)$ ανήκει στο $I$, καταλήγοντας έτσι σε άτοπο.

Συμπεράνατε ότι, αν το $I$ είναι γνήσιο κλειστό ιδεώδες του $L^1(\mathbb{R}^d)$, τότε υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}^d$ ώστε $I \subseteq M_\xi$.

(iii) Αποδείξτε ότι για κάθε μέγιστο γνήσιο κλειστό ιδεώδες $I$ του $L^1(\mathbb{R}^d)$ υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}^d$ ώστε $I = M_\xi$.

(iv) Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του (iii), αποδείξτε το **Θεώρημα του Wiener** της άσκησης 17.

19. Έστω $\mu \in M(\mathbb{R}^d)$ και έστω $A = \{x \,|\, \mu(\{x\}) \neq 0\}$.

(i) Αποδείξτε ότι ισχύει
$$\sum_{n=1}^N |\mu(\{x_n\})| < \|\mu\|$$
για κάθε $N$ και κάθε $x_1, \ldots, x_N$. Βάσει αυτού αποδείξτε ότι το $A$ είναι αριθμήσιμο και θέσατε
$$\mu_d = \sum_{x \in A} \mu(\{x\})\, \delta_x.$$
Το $\mu_d$ ονομάζεται *διακριτό μέρος* του $\mu$. Αποδείξτε ότι $\mu_d \in M(\mathbb{R}^d)$ και ότι
$$\|\mu_d\| = \sum_{x \in A} |\mu(\{x\})| \leqslant \|\mu\|.$$
Κατόπιν θέσατε
$$\mu_c = \mu - \mu_d.$$
Το $\mu_c$ ονομάζεται *συνεχές μέρος* του $\mu$. Αποδείξτε ότι το $\mu_c \in M(\mathbb{R}^d)$ είναι συνεχές, δηλαδή ότι ισχύει
$$\mu_c(\{x\}) = 0 \qquad \text{για κάθε } x.$$
(ii) Αποδείξτε το **Θεώρημα του Wiener**:
$$\lim_{r \to +\infty} \frac{1}{|B(0;r)|} \int_{B(0;r)} |\widehat{\mu}(\xi)|^2 \, d\xi = \sum_{x \in A} |\mu(\{x\})|^2.$$
*Υπόδειξη:* Πρώτα θεωρήστε την περίπτωση: $\mu = \mu_d = \sum_{x \in A} \mu(\{x\})\, \delta_x$ και το $A$ είναι πεπερασμένο. Αν το $A$ είναι άπειρο αριθμήσιμο, δηλαδή $A = \{x_j \,|\, j \in \mathbb{N}\}$, τότε για τυχόν $\epsilon > 0$ γράψτε
$$\mu' = \sum_{j=1}^m \mu(\{x_j\})\, \delta_{x_j} \quad \text{και} \quad \mu'' = \sum_{j=m+1}^{+\infty} \mu(\{x_j\})\, \delta_{x_j},$$
όπου $\sum_{j=m+1}^{+\infty} |\mu(\{x_j\})| < \epsilon$. Τέλος, στην περίπτωση $\mu = \mu_c$ αποδείξτε την επιθυμητή ισότητα με $0$ στο δεξιό μέρος.

20. (i) Έστω γραμμικός μετασχηματισμός $T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$. Έστω ότι ο $T$ είναι συμμετρικός, δηλαδή $T^* = T$, και θετικά ορισμένος, δηλαδή ότι ισχύει $Tx \cdot x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $a > 0$ ώστε να ισχύει $Tx \cdot x \geqslant a|x|^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^d$.

*Υπόδειξη:* Χρησιμοποιήστε την συμπάγεια της μοναδιαίας σφαίρας $\mathbb{S}^{d-1}$.

Αποδείξτε ότι η $e^{-\pi\, Tx \cdot x}$ είναι στον $L^1(\mathbb{R}^d)$ και ότι
$$\widehat{e^{-\pi\, Tx \cdot x}}(\xi) = \frac{1}{|\det T|^{1/2}}\, e^{-\pi T^{-1}\xi \cdot \xi} \qquad \text{για κάθε } \xi.$$
*Υπόδειξη:* Δείτε πρώτα την περίπτωση που ο $T$ είναι διαγώνιος και κατόπιν χρησιμοποιήστε το ότι κάθε συμμετρικός $T$ γράφεται $T = UDU^{-1}$, όπου ο $D$ είναι διαγώνιος και ο $U$ είναι ορθογώνιος.

(ii) Έστω $\lambda \in \mathbb{C}$ με $\operatorname{Re} \lambda > 0$. Αποδείξτε ότι η $e^{-\pi\lambda|x|^2}$ είναι στον $L^1(\mathbb{R}^d)$ και ότι
$$\widehat{e^{-\pi\lambda|x|^2}}(\xi) = \frac{1}{(\sqrt{\lambda})^d}\, e^{-\pi\lambda^{-1}|\xi|^2} \qquad \text{για κάθε } \xi.$$

Τί νόημα δίνουμε στο $\sqrt{\lambda}$;

*Υπόδειξη:* Δείτε πρώτα την περίπτωση $d = 1$ είτε με κατευθείαν υπολογισμό είτε αποδεικνύοντας ότι οι δύο πλευρές της ισότητας είναι ολόμορφες συναρτήσεις του $\lambda$ στο δεξιό ημιεπίπεδο $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\,\lambda > 0\}$ και παρατηρώντας ότι η ισότητα ισχύει για $\lambda > 0$.

(iii) Έστω $T = A + iB$, όπου οι $A, B : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ είναι συμμετρικοί γραμμικοί μετασχηματισμοί. Αν ο $A$ είναι θετικά ορισμένος, αποδείξτε ότι η $e^{-\pi\, Tx\cdot x}$ είναι στον $L^1(\mathbb{R}^d)$ και υπολογίστε το

$$\widehat{e^{-\pi\, Tx\cdot x}}(\xi).$$

21. **Παραγώγιση του μετασχηματισμού Fourier ως προς παράμετρο**.

Έστω $f : \mathbb{R}^d \times (a,b) \to \mathbb{C}$ τέτοια ώστε

(i) για κάθε $t \in (a,b)$ η $f(x,t)$ είναι (ως συνάρτηση του $x$) ολοκληρώσιμη στον $\mathbb{R}^d$,

(ii) για σχεδόν κάθε $x \in \mathbb{R}^d$ η $f(x,t)$ είναι (ως συνάρτηση του $t$) παραγωγίσιμη στο $(a,b)$,

(iii) υπάρχει $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ ώστε να ισχύει $|\frac{\partial}{\partial t} f(x,t)| \leqslant g(x)$ για σχεδόν κάθε $x \in \mathbb{R}^d$ και κάθε $t \in (a,b)$.

Αποδείξτε ότι ο μετασχηματισμός Fourier (ως προς $x$) που φυσικά δίνεται από τον τύπο

$$\widehat{f(x,t)}(\xi,t) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x,t) e^{-2\pi i\xi\cdot x}\, dx \qquad \text{για κάθε } (\xi,t) \in \mathbb{R}^d \times (a,b)$$

είναι, για κάθε $\xi \in \mathbb{R}^d$, παραγωγίσιμος (ως συνάρτηση του $t$) στο $(a,b)$ και ότι ισχύει

$$\frac{\partial}{\partial t}\widehat{f(x,t)}(\xi,t) = \widehat{\frac{\partial}{\partial t} f(x,t)}(\xi,t) \qquad \text{για κάθε } (\xi,t) \in \mathbb{R}^d \times (a,b)$$

δηλαδή

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathbb{R}^d} f(x,t) e^{-2\pi i\xi\cdot x}\, dx = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial}{\partial t} f(x,t) e^{-2\pi i\xi\cdot x}\, dx \qquad \text{για κάθε } (\xi,t) \in \mathbb{R}^d \times (a,b).$$

22. **Για την εξίσωση της θερμότητας**.

Έστω $\mathbb{R}^{d+1}_+ = \mathbb{R}^d \times (0,+\infty) = \{(x,t) \mid x \in \mathbb{R}^d, t > 0\}$ ο άνω ημιχώρος του $\mathbb{R}^{d+1}$.

(i) Θεωρήστε την συνάρτηση $g : \mathbb{R}^{d+1}_+ \to \mathbb{C}$ με τύπο

$$g(x,t) = \epsilon_{\sqrt{4\pi t}}(G)(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}}\, e^{-\frac{1}{4t}|x|^2}.$$

Αποδείξτε ότι η $g(x,t)$ ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση της θερμότητας στον $\mathbb{R}^{d+1}_+$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x\right) g(x,t) = 0 \qquad \text{για κάθε } (x,t) \in \mathbb{R}^{d+1}_+,$$

όπου $\Delta_x = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_d^2}$ είναι ο διαφορικός τελεστής του Laplace στον $\mathbb{R}^d$.

(ii) Χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα της άσκησης 21 (αφού ελέγξετε τις υποθέσεις) για να αποδείξετε ότι ισχύει

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + 4\pi^2|\xi|^2\right)\widehat{g(x,t)}(\xi,t) = 0 \qquad \text{για κάθε } (\xi,t) \in \mathbb{R}^{d+1}_+.$$

*Υπόδειξη:* Για να παραγωγίσετε σε κάποιο $t \in (0,+\infty)$ πρέπει να περιοριστείτε σε κάποιο κατάλληλο διάστημα $(a,b)$ που περιέχει το $t$ και περιέχεται στο $(0,+\infty)$.

(iii) Ανεξάρτητα από το (ii), βρείτε τον τύπο του $\widehat{g(x,t)}(\xi,t)$, χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό Fourier της $G(x) = e^{-\pi|x|^2}$, και ελέγξτε το αποτέλεσμα του (ii).

(iv) Θεωρήστε $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ και αποδείξτε ότι η συνέλιξη (ως προς $x$) με τύπο

$$(f * g)(x,t) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) g(y,t)\, dy$$

ορίζεται *για κάθε* $(x,t) \in \mathbb{R}^{d+1}_+$ και ικανοποιεί την εξίσωση της θερμότητας στον $\mathbb{R}^{d+1}_+$:

$$(\tfrac{\partial}{\partial t} - \Delta_x)(f * g)(x,t) = 0 \qquad \text{για κάθε } (x,t) \in \mathbb{R}^{d+1}_+.$$

Αποδείξτε ότι η $f$ αποτελεί την "συνοριακή συνάρτηση" της $f * g$ στο σύνορο $\mathbb{R}^d$ του $\mathbb{R}^{d+1}_+$ με την εξής έννοια:

$$\lim_{t\to 0+} \|(f * g)(\cdot,t) - f\|_1 = 0.$$

23. **Για την εξίσωση του δυναμικού**.
(i) Θεωρήστε την συνάρτηση $P : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ με τύπο

$$P(x) = c_d \tfrac{1}{(|x|^2+1)^{(d+1)/2}},$$

όπου $c_d$ είναι σταθερά που εξαρτάται μόνο από την διάσταση $d$ και είναι τέτοια ώστε

$$\int_{\mathbb{R}^d} P(x)\,dx = 1.$$

Θεωρήστε και την συνάρτηση $p : \mathbb{R}^{d+1}_+ \to \mathbb{C}$ με τύπο

$$p(x,t) = \epsilon_t(P)(x) = c_d \tfrac{t}{(|x|^2+t^2)^{(d+1)2}}.$$

Η μονοπαραμετρική οικογένεια συναρτήσεων (του $x$) $p(x,t)$ ($t > 0$) ονομάζεται **πυρήνας του Poisson**. Αποδείξτε ότι ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση του δυναμικού στον $\mathbb{R}^{d+1}_+$:

$$\Delta_{(x,t)} p(x,t) = (\tfrac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta_x) p(x,t) = 0 \qquad \text{για κάθε } (x,t) \in \mathbb{R}^{d+1}_+,$$

όπου $\Delta_x = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_d^2}$ είναι ο διαφορικός τελεστής του Laplace στον $\mathbb{R}^d$.
(ii) Χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα της άσκησης 21 (αφού ελέγξετε τις υποθέσεις) για να αποδείξετε ότι ισχύει

$$(\tfrac{\partial^2}{\partial t^2} - 4\pi^2|\xi|^2)\widehat{p(x,t)}(\xi,t) = 0 \qquad \text{για κάθε } (\xi,t) \in \mathbb{R}^{d+1}_+.$$

*Υπόδειξη:* Για να παραγωγίσετε σε κάποιο $t \in (0,+\infty)$ πρέπει να περιοριστείτε σε κάποιο κατάλληλο διάστημα $(a,b)$ που περιέχει το $t$ και περιέχεται στο $(0,+\infty)$.

(iii) Ανατρέξτε στα εισαγωγικά βιβλία συνήθων διαφορικών εξισώσεων για να δείτε ότι η γενική λύση της $y''(t) - k^2 y(t) = 0$ στο $\mathbb{R}$ με $k > 0$ είναι η $y(t) = \rho e^{kt} + \sigma e^{-kt}$ όπου $\rho, \sigma$ είναι σταθερές. Συμπεράνατε ότι ισχύει $\widehat{p(x,t)}(\xi,t) = \rho e^{2\pi|\xi|t} + \sigma e^{-2\pi|\xi|t}$ για κάθε $(\xi,t) \in \mathbb{R}^{d+1}_+$ και κατόπιν αποδείξτε ότι ισχύει

$$\widehat{p(x,t)}(\xi,t) = e^{-2\pi|\xi|t} \qquad \text{για κάθε } (\xi,t) \in \mathbb{R}^{d+1}_+.$$

Ειδικώτερα, για $t = 1$, έχουμε

$$\widehat{P(x)}(\xi) = e^{-2\pi|\xi|} \qquad \text{για κάθε } \xi \in \mathbb{R}^d.$$

(iv) Απομένει να υπολογιστεί η σταθερά $c_d$. Κάντε το με τα παρακάτω βήματα.
Με πολικές συντεταγμένες (δικαιολογήστε) έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}^d} \tfrac{1}{(|x|^2+1)^{(d+1)/2}}\,dx = \sigma_{d-1} \int_0^{+\infty} \tfrac{r^{d-1}}{(r^2+1)^{(d+1)/2}}\,dr,$$

όπου $\sigma_{d-1}$ είναι η επιφάνεια της μοναδιαίας σφαίρας $\mathbb{S}^{d-1}$ του $\mathbb{R}^d$.
Με πολικές συντεταγμένες έχουμε

$$1 = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi|x|^2}\,dx = \sigma_{d-1} \int_0^{+\infty} e^{-\pi r^2} r^{d-1}\,dr = \tfrac{\sigma_{d-1}}{2\pi^{d/2}} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{(d/2)-1}\,dt = \tfrac{\sigma_{d-1}}{2\pi^{d/2}} \Gamma(d/2),$$

όπου

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{s-1}\, dt \qquad \text{για } s > 0$$

είναι η γνωστή *συνάρτηση-γάμμα* $\Gamma : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$. Άρα

$$\sigma_{d-1} = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}.$$

Με κατάλληλη αλλαγή μεταβλητής παίρνουμε

$$\int_0^{+\infty} \frac{r^{d-1}}{(r^2+1)^{(d+1)/2}}\, dr = \int_0^{\pi/2} \sin^{d-1}\phi\, d\phi.$$

Θέτουμε $I_d = \int_0^{\pi/2} \sin^d \phi\, d\phi$ και με μια απλή ολοκλήρωση κατά μέρη αποδεικνύουμε (πώς;) τον αναδρομικό τύπο

$$I_d = \frac{d-1}{d}\, I_{d-2} \qquad \text{για } d \geqslant 2.$$

Γνωρίζουμε(;) ότι η συνάρτηση-γάμμα ικανοποιεί τον αναδρομικό τύπο

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s) \qquad \text{για } s > 0.$$

Μέχρι τώρα έχουμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{(|x|^2+1)^{(d+1)/2}}\, dx = \frac{2\pi^{d/2} I_{d-1}}{\Gamma(d/2)},$$

και αν για απλότητα θέσουμε

$$a_d = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{(|x|^2+1)^{(d+1)/2}}\, dx = \frac{2\pi^{d/2} I_{d-1}}{\Gamma(d/2)},$$

τότε αποδείξτε ότι το $a_d$ ικανοποιεί τον αναδρομικό τύπο

$$a_d = \frac{2\pi}{d-1} a_{d-2} \qquad \text{για } d \geqslant 3.$$

Θέτουμε, επίσης,

$$b_d = \frac{\pi^{(d+1)/2}}{\Gamma((d+1)/2)} \qquad \text{για } d \geqslant 1,$$

και αποδείξτε ότι το $b_d$ ικανοποιεί τον *ίδιο* αναδρομικό τύπο

$$b_d = \frac{2\pi}{d-1} b_{d-2} \qquad \text{για } d \geqslant 3.$$

Τώρα αποδείξτε ότι $a_1 = b_1$ και $a_2 = b_2$ (θα χρειαστείτε το ότι $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$) και συμπεράνατε ότι

$$a_d = b_d \qquad \text{για } d \geqslant 1.$$

Τέλος, συμπεράνατε ότι

$$c_d = \frac{\Gamma((d+1)/2)}{\pi^{(d+1)/2}}.$$

(v) Θεωρήστε $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ και αποδείξτε ότι η συνέλιξη (ως προς $x$) με τύπο

$$(f * p)(x, t) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) p(y, t)\, dy$$

ορίζεται *για κάθε* $(x, t) \in \mathbb{R}^{d+1}_+$ και ικανοποιεί την εξίσωση του δυναμικού στον $\mathbb{R}^{d+1}_+$:

$$\Delta_{(x,t)}(f * p)(x, t) = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta_x\right)(f * p)(x, t) = 0 \qquad \text{για κάθε } (x, t) \in \mathbb{R}^{d+1}_+.$$

Αποδείξτε ότι η $f$ αποτελεί την “συνοριακή συνάρτηση” της $f * p$ στο σύνορο $\mathbb{R}^d$ του $\mathbb{R}^{d+1}_+$ με την εξής έννοια:

$$\lim_{t \to 0+} \|(f * p)(\cdot, t) - f\|_1 = 0.$$

24. Έστω $a \in BC(\mathbb{R}^d)$. Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$h_t(x) = \int_{\mathbb{R}^d} a(\xi)\widehat{g}(t\xi)e^{2\pi i x\cdot\xi}\,d\xi \qquad \text{για } t > 0,$$

όπου $g, \widehat{g} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ και $\int_{\mathbb{R}^d} g(x)\,dx = 1$ (π.χ. η συνάρτηση $e^{-\pi|x|^2}$ του Gauss ή η συνάρτηση $c_d(|x|^2+1)^{-(d+1)/2}$ του Poisson).

(i) Αν η $a$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier ενός μέτρου στον $M(\mathbb{R}^d)$, τότε αποδείξτε ότι $\sup_{t>0}\|h_t\|_1 < +\infty$.

Αντιστρόφως, έστω $\sup_{t>0}\|h_t\|_1 < +\infty$. Τότε (γιατί;) υπάρχει $\mu \in M(\mathbb{R}^d)$ και ακολουθία $t_n \to 0+$ ώστε

$$\int_{\mathbb{R}^d} \phi(x)h_{t_n}(x)\,dx \to \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x)\,d\mu(x)$$

για κάθε $\phi \in C_0(\mathbb{R}^d)$. Θεωρώντας τυχόν $\epsilon > 0$ και τυχόν $\eta \in \mathbb{R}^d$, χρησιμοποιήστε την $\phi(x) = e^{-\pi\epsilon^2|x|^2}e^{-2\pi i\eta\cdot x}$ για να αποδείξετε ότι

$$\widehat{\mu}(\eta) = a(\eta) \qquad \text{για κάθε } \eta \in \mathbb{R}^d.$$

(ii) Αν η $a$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier ενός θετικού μέτρου στον $M(\mathbb{R}^d)$ και αν $g \geqslant 0$, τότε αποδείξτε ότι $h_t \geqslant 0$ για κάθε $t > 0$.

Αντιστρόφως, αν $h_t \geqslant 0$ για κάθε $t > 0$, αποδείξτε ότι η $a$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier ενός θετικού μέτρου στον $M(\mathbb{R}^d)$.

25. (i) Έστω $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ με $\int_{\mathbb{R}^d} g(x)\,dx = 1$. Για κάθε $\mu \in M(\mathbb{R}^d)$ αποδείξτε ότι

$$\mu * \epsilon_t(g) \to \mu \qquad \text{ασθενώς-}* \text{ στον } M(\mathbb{R}^d) \qquad \text{όταν } t \to 0+\,.$$

(ii) Αποδείξτε ότι ο μετασχηματισμός Fourier $\mathcal{F} : M(\mathbb{R}^d) \to BC(\mathbb{R}^d)$ είναι ένα-προς-ένα.