Θεωρία Αριθμών

Ασκήσεις

Μιχάλης Παπαδημητράκης

Τμήμα Μαθηματικών

Πανεπιστήμιο Κρήτης

Διαιρετότητα, μέγιστος κοινός διαιρέτης.

1. Χωρίς να χρησιμοποιήσετε την αρχή της επαγωγής, αποδείξτε ότι κάθε αριθμός $n(n+1)$ είναι άρτιος και ότι κάθε αριθμός $n(n+1)(n+2)$ διαιρείται από τον 6.

2. Αποδείξτε ότι, αν ένας αριθμός γράφεται $6k+5$ για κάποιον k, τότε γράφεται $3l+2$ για κάποιον l. Αποδείξτε ότι το αντίστροφο δεν ισχύει.

3. Αποδείξτε ότι οι $a, a+2, a+4$ δίνουν τα τρία διαφορετικά υπόλοιπα $0, 1, 2$ όταν διαιρεθούν από τον 3.

4. Αποδείξτε ότι κανένας αριθμός της μορφής $3k-1$ δεν είναι τέλειο τετράγωνο.

5. Αποδείξτε ή δώστε αντιπαράδειγμα: $a \mid b+c \;\Rightarrow\; a \mid b$ ή $a \mid c$.

6. Αποδείξτε την εξής παραλλαγή της ταυτότητας της Ευκλείδειας διαίρεσης: για κάθε $a > 0$ και κάθε b, m υπάρχουν μοναδικοί q, r ώστε
$$b = qa + r, \quad m \le r < m + a.$$
Μπορείτε είτε να χρησιμοποιήσετε την συνήθη ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης είτε να μιμηθείτε την απόδειξή της.

7. Αποδείξτε ότι $15 \mid 2^{4n} - 1$.

8. Βρείτε τους $(1769, 2378)$, $(5033464705, 3137640337)$.

9. Αποδείξτε ότι

   $(a, a+n) \mid n$ αν $n \neq 0$.

   $(5a+2, 7a+3) = 1$.

   $(a, 4) = 2,\ (b, 4) = 2 \;\Rightarrow\; (a+b, 4) = 4$.

   $(a, b) = 1 \;\Rightarrow\; (a+2b, 2a+b) = 1$ ή 3.

   $(a, b) = 1 \;\Rightarrow\; (a+b, a^2+b^2) = 1$ ή 2.

10. Αποδείξτε ότι

    $(a, b) = 1,\ c \mid a \;\Rightarrow\; (c, b) = 1$.

    $a \mid c,\ b \mid c,\ (a, b) = 1 \;\Rightarrow\; ab \mid c$. Βάσει αυτού αποδείξτε ότι το γινόμενο πέντε διαδοχικών ακεραίων διαιρείται από το 120.

    $(a, b) = 1,\ (a, c) = 1 \;\Rightarrow\; (a, bc) = 1$.

    $(a, b) = 1,\ d \mid ac,\ d \mid bc \;\Rightarrow\; d \mid c$.

    $(a, b) = 1 \;\Rightarrow\; (a^m, b^n) = 1$.

11. Αποδείξτε ότι: $a^n \mid b^n \;\Rightarrow\; a \mid b$.

12. Βρείτε το $[306, 657]$.

13. Αποδείξτε ότι $[ma, mb] = |m|[a, b]$.

14. Αποδείξτε ότι $[a, b] = (a, b)$ αν και μόνο αν $a = \pm b$.

15. Αν $d, e \ge 1$, αποδείξτε ότι υπάρχουν a, b ώστε $(a, b) = d, [a, b] = e$ αν και μόνον αν $d \mid e$.

16. Αποδείξτε ότι δεν υπάρχουν $a, b \ge 1$, $n \ge 2$ ώστε $a^n - b^n \mid a^n + b^n$.

17. Αν $a, b \geq 3$, αποδείξτε ότι ο $2^b - 1$ δεν διαιρεί τον $2^a + 1$.

18. Αποδείξτε με την αρχή της επαγωγής ότι για κάθε φυσικό n το $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$ διαιρεί το γινόμενο $(m+1)(m+2)\cdots(m+n)$ οποιωνδήποτε n διαδοχικών φυσικών.

19. Αν οι $a_1, \ldots, a_n$ δεν είναι όλοι 0, τότε με $(a_1, \ldots, a_n)$ συμβολίζουμε τον μέγιστο κοινό διαιρέτη των $a_1, \ldots, a_n$.
Αν $a_1 \neq 0$, τότε ορίζουμε διαδοχικά τους
$$d_2 = (a_1, a_2),\ d_3 = (d_2, a_3),\ \ldots,\ d_n = (d_{n-1}, a_n).$$
Αποδείξτε ότι $(a_1, \ldots, a_n) = d_n$.

20. Αν οι $a_1, \ldots, a_n$ όλοι δεν είναι 0, τότε με $[a_1, \ldots, a_n]$ συμβολίζουμε το ελάχιστο κοινό θετικό πολλαπλάσιο των $a_1, \ldots, a_n$.
Αν $a_1, \ldots, a_n \neq 0$, τότε ορίζουμε διαδοχικά τους
$$e_2 = [a_1, a_2],\ e_3 = [e_2, a_3],\ \ldots,\ e_n = [e_{n-1}, a_n].$$
Αποδείξτε ότι $[a_1, \ldots, a_n] = e_n$.

21. Βρείτε όλες τις τριάδες a, b, c ώστε $(a, b, c) = 10, [a, b, c] = 100$.