Θεωρία Αριθμών

Ασκήσεις

Μιχάλης Παπαδημητράκης

Τμήμα Μαθηματικών

Πανεπιστήμιο Κρήτης

Πρώτοι αριθμοί.

1. Είναι οι αριθμοί $701, 1009$ πρώτοι;

2. Βρείτε την κανονική αναπαράσταση των $10140, 36000, 255255$.

3. Βρείτε πρώτο p ώστε ο $p + 3$ να είναι πρώτος. Πόσοι τέτοιοι p υπάρχουν;

4. Αν ο p είναι πρώτος και $p \mid a^n$, αποδείξτε ότι $p^n \mid a^n$.

   Αν ο p είναι πρώτος και $(a, b) = p$, βρείτε τους $(a^2, b^2), (a^2, b), (a^3, b^2)$.

   Αν ο p είναι πρώτος και $(a, p^2) = p, (b, p^3) = p^2$, βρείτε τους $(ab, p^4), (a + b, p^4)$.

5. Βρείτε την κανονική αναπαράσταση του $832!$. Ξαναδοκιμάστε αφού λύσετε την άσκηση 25.

6. Αποδείξτε ότι

$$(a, [b, c]) = [(a, b), (a, c)], \quad [a, (b, c)] = ([a, b], [a, c]).$$

7. Έστω $a > 1$. Αποδείξτε ότι ο a είναι n-οστή δύναμη αν και μόνο αν όλοι οι εκθέτες στην κανονική αναπαράσταση του a είναι πολλαπλάσια του n.

8. Βρείτε την γενική μορφή των φυσικών οι οποίοι είναι διπλάσιοι τετραγώνου και τριπλάσιοι τρίτης δύναμης και πενταπλάσιοι πέμπτης δύναμης. Ποιός είναι ο ελάχιστος τέτοιος φυσικός;

9. Έστω $(x, 3) = (y, 3) = 1$. Αποδείξτε ότι ο $x^2 + y^2$ δεν είναι τετράγωνο.

10. Αν ο p είναι πρώτος και $p \neq 2, 5$, αποδείξτε ότι $10 \mid p^2 - 1$ ή $10 \mid p^2 + 1$.

11. Αν ο p είναι πρώτος, αποδείξτε ότι $\sqrt{p}$ είναι άρρητος.

    Έστω $n \geq 2$. Αν ο $\sqrt[n]{a}$ είναι ρητός, αποδείξτε ότι είναι ακέραιος.

    Αν $n \geq 2$, αποδείξτε ότι ο $\sqrt[n]{n}$ είναι άρρητος.

12. Ο $a > 1$ ονομάζεται *ελεύθερος τετραγώνου* αν δεν διαιρείται από κανένα τετράγωνο > 1. Αποδείξτε ότι ο $a > 1$ είναι ελεύθερος τετραγώνου αν και μόνο αν είναι γινόμενο διαφορετικών πρώτων.

    Αποδείξτε ότι κάθε $a > 1$ γράφεται με μοναδικό τρόπο ως $a = bc$, όπου ο b είναι ελεύθερος τετραγώνου και ο c είναι τετράγωνο.

13. Αποδείξτε ότι κάθε $a > 1$ γράφεται με μοναδικό τρόπο ως $a = 2^k m$, όπου $k \geq 0$ και ο m είναι περιττός.

14. Έστω $k \geq 2$, $a, b, c \geq 1$, $ab = c^k, (a, b) = 1$. Αποδείξτε ότι υπάρχουν $m, n \geq 1$ ώστε $a = m^k, b = n^k, c = mn$.

15. Αν $n > 1$, αποδείξτε ότι ο $n^4 + 4$ είναι σύνθετος.

16. Αν ο $n > 4$ είναι σύνθετος, αποδείξτε ότι $n \mid (n - 1)!$.

17. Αν $ad - bc = \pm 1, u = am + bn, v = cm + dn$, αποδείξτε ότι $(m, n) = (u, v)$.

18. Αν ο $2^n + 1$ είναι πρώτος, αποδείξτε ότι ο n είναι δύναμη του 2.

19. Αν $n > 2$, αποδείξτε ότι υπάρχει πρώτος p ώστε $n < p < n!$. (Υπόδειξη: υπάρχει πρώτος διαιρέτης του $n! - 1$.)

20. Έστω p_n ο n-οστός πρώτος. Αποδείξτε ότι $p_n \leq 2^{2^{n-1}}$. (Υπόδειξη: αποδείξτε ότι $p_{n+1} \leq p_1 \cdots p_n + 1$.)

21. Αν $\sigma_m(a)$ είναι το άθροισμα των m-οστών δυνάμεων των θετικών διαιρετών του $a > 1$ και αν $a = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ είναι η κανονική αναπαράσταση του a, αποδείξτε ότι

$$\sigma_m(a) = \frac{p_1^{m(\alpha_1+1)} - 1}{p_1^m - 1} \cdots \frac{p_k^{m(\alpha_k+1)} - 1}{p_k^m - 1}.$$

22. Χρησιμοποιώντας την εικασία του Bertrand, αποδείξτε ότι για τον n-οστό πρώτο p_n ισχύει $p_n \leq 2^n$.

23. Αποδείξτε ότι κάθε πρώτος > 3 είναι είτε της μορφής $6n + 1$ είτε της μορφής $6n + 5$.

    Αποδείξτε ότι υπάρχουν άπειροι πρώτοι της μορφής $6n + 5$.

24. Έστω 2^k η μέγιστη δύναμη του 2 ανάμεσα στους $1, 2, \ldots, n$. Αποδείξτε ότι ο 2^k δεν διαιρεί κανέναν από τους $1, 2, \ldots, n$, εκτός από τον ίδιο τον 2^k.

    Αποδείξτε ότι ο $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ δεν είναι ακέραιος.

25. Αν $m, n \geq 1$, αποδείξτε ότι το πλήθος των θετικών διαιρετών του m οι οποίοι είναι $\leq n$ ισούται με $[\frac{n}{m}]$.

    Αν $n \geq 1$ και ο p είναι πρώτος, αποδείξτε ότι η μέγιστη δύναμη του p η οποία διαιρεί τον $n!$ είναι ο p^k, όπου

$$k = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \cdots .$$

    Παρατηρήστε ότι η τελευταία σειρά είναι στην πραγματικότητα πεπερασμένο άθροισμα.

    Αποδείξτε ότι ισχύει $[x] + [y] \leq [x + y]$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

    Αν $n, m \geq 1$, αποδείξτε ότι ο $\frac{(n+m)!}{n!m!}$ είναι ακέραιος.