

Θεωρία Αριθμών

Ασκήσεις

Μιχάλης Παπαδημητράκης

Τμήμα Μαθηματικών

Πανεπιστήμιο Κρήτης

Διοφαντικές εξισώσεις.

1. Λύστε τις Διοφαντικές εξισώσεις $14x + 35y = 93$ και $56x + 72y = 40$.
2. Λύστε τις Διοφαντικές εξισώσεις $18x + 5y = 48$ και $158x - 57y = 7$ για $x, y > 0$.
3. Έστω $a, b > 0$, $(a, b) = 1$. Αποδείξτε ότι η Διοφαντική εξίσωση $ax - by = c$ για $x, y > 0$ έχει άπειρες λύσεις.
4. Έστω $a, b, c > 0$, $(a, b) = d$, $ab = c^2$. Αποδείξτε ότι υπάρχουν $m, n > 0$ ώστε $a = dm^2$, $b = dn^2$.
5. Για ποιούς n έχει τουλάχιστον μία λύση η Διοφαντική εξίσωση $x^2 - y^2 = n$;
6. Βρείτε όλες τις Πυθαγόρειες τριάδες (ξ, η, ζ) με $\xi = 40$.
Βρείτε όλες τις Πυθαγόρειες τριάδες (ξ, η, ζ) με $\xi, \eta, \zeta > 0$ έτσι ώστε τα ξ, η, ζ να αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.
7. Έστω Πυθαγόρεια τριάδα (ξ, η, ζ) . Αποδείξτε ότι τουλάχιστον ένα από τα ξ, η διαιρείται από το 3 και ότι τουλάχιστον ένα από τα ξ, η, ζ διαιρείται από το 5.
8. Έστω τυχόν n . Αποδείξτε ότι υπάρχει Πυθαγόρεια τριάδα (ξ, η, ζ) ώστε τουλάχιστον ένα από τα ξ, η, ζ να είναι ίσο με n .
9. Αποδείξτε ότι η Διοφαντική εξίσωση $15x^2 - 7y^2 = 9$ δεν έχει λύσεις.
10. Αποδείξτε ότι η Διοφαντική εξίσωση $x^2 + y^2 = 9z + 3$ δεν έχει λύσεις.
11. Αποδείξτε ότι η Διοφαντική εξίσωση $x^4 - 2y^2 = 1$ έχει μόνο δύο λύσεις.
12. Βρείτε όλες τις λύσεις της Διοφαντικής εξίσωσης $x^2 + y^2 = 2z^2$.