Θεωρία Αριθμών

Ασκήσεις

Μιχάλης Παπαδημητράκης

Τμήμα Μαθηματικών

Πανεπιστήμιο Κρήτης

Αριθμοθεωρητικές συναρτήσεις.

1. Για κάθε πραγματικό k ορίζουμε

$$\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k.$$

   Αποδείξτε ότι η σ_k είναι πολλαπλασιαστική συνάρτηση.

2. Έστω f, g δυο πολλαπλασιαστικές συναρτήσεις. Αν ισχύει $f(p^\alpha) = g(p^\alpha)$ για κάθε πρώτο p και κάθε $\alpha \geq 1$, αποδείξτε ότι $f = g$.

3. Αποδείξτε τις παρακάτω ταυτότητες:

$$\sum_{d|n} \frac{1}{d} = \frac{\sigma(n)}{n}, \qquad \Big(\sum_{d|n} \tau(d)\Big)^2 = \sum_{d|n} \tau(d)^3,$$

$$\sum_{d|n} \sigma(d) = n \sum_{d|n} \frac{\tau(d)}{d}, \qquad n \sum_{d|n} \frac{\sigma(d)}{d} = \sum_{d|n} d\tau(d).$$

4. Αποδείξτε τις παρακάτω ταυτότητες:

$$\sum_{d|n} \mu(d)\tau(d) = \begin{cases} 1, & \text{αν } n = 1 \\ (-1)^k, & \text{αν } n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k} \end{cases}$$

$$\sum_{d|n} \mu(d)\sigma(d) = \begin{cases} 1, & \text{αν } n = 1 \\ (-1)^k p_1 \cdots p_k, & \text{αν } n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k} \end{cases}$$

$$\sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d} = \begin{cases} 1, & \text{αν } n = 1 \\ (1 - \frac{1}{p_1}) \cdots (1 - \frac{1}{p_k}) = \frac{\phi(n)}{n}, & \text{αν } n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k} \end{cases}$$

$$\sum_{d|n} d\mu(d) = \begin{cases} 1, & \text{αν } n = 1 \\ (1 - p_1) \cdots (1 - p_k), & \text{αν } n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k} \end{cases}$$

5. Βρείτε το πλήθος των αριθμών k με $1 \leq k \leq 3600$ οι οποίοι έχουν έναν τουλάχιστον κοινό παράγοντα > 1 με τον 3600.

6. Βρείτε όλους τους n ώστε $\phi(n) = 24$.

7. Αν οι $p, 2p - 1$ είναι και οι δύο περιττοί πρώτοι και αν $n = 2(2p - 1)$, αποδείξτε ότι $\phi(n + 2) = \phi(n)$.

8. Αν $m, n \geq 1$ και $m \mid n$, αποδείξτε ότι $\phi(m) \mid \phi(n)$.

9. Αν $m, n \geq 1$, αποδείξτε ότι:

$$(m, n)\phi(m)\phi(n) = \phi((m, n))\phi(mn), \qquad \phi(m)\phi(n) = \phi((m, n))\phi([m, n]).$$

10. Αποδείξτε ότι

    $\phi(n) \geq \frac{1}{2}\sqrt{n}$ για κάθε $n \geq 1$.
    $\tau(n)\phi(n) \geq n$ για κάθε $n \geq 1$.
    $\phi(n) \leq n - \sqrt{n}$ για κάθε σύνθετο $n > 1$.

11. Έστω αριθμοθεωρητική συνάρτηση f και έστω ότι η F ορίζεται με τον τύπο

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d).$$

Αποδείξτε την ταυτότητα:

$$\sum_{n=1}^{N} F(n) = \sum_{k=1}^{N} f(k) \left[\frac{N}{k} \right].$$

Βάσει αυτής της ταυτότητας, αποδείξτε τις

$$\sum_{k=1}^{N} \mu(k) \left[\frac{N}{k} \right] = 1, \qquad \sum_{k=1}^{N} \phi(k) \left[\frac{N}{k} \right] = \frac{N(N+1)}{2}, \qquad \sum_{n=1}^{N} \tau(n) = \sum_{k=1}^{N} \left[\frac{N}{k} \right].$$