Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις.

Πρώτο φυλλάδιο ασκήσεων

1. Ποιοί από τους παρακάτω τελεστές είναι γραμμικοί;

   α. $\mathcal{L}(u) = u_x + {u_y}^2$.
   β. $\mathcal{L}(u) = u_x + u_y + 1$.
   γ. $\mathcal{L}(u) = \sqrt{1+x^2}(\cos y)u_x + u_{yxy} - (\arctan \frac{x}{y})u$.

2. Βρείτε την τάξη των παρακάτω μ.δ.ε. και πείτε αν είναι μη-γραμμικές ή ομογενείς γραμμικές ή μη-ομογενείς γραμμικές.

   α. $u_y - u_{xx} = 1$.
   β. $u_y - u_{xx} + xu = 0$.
   γ. $u_y - u_{xxy} + uu_x = 0$.
   δ. $u_{yy} - u_{xx} + x^2 = 0$.
   ε. $u_x(1+{u_x}^2)^{-1/2} + u_y(1+{u_y}^2)^{-1/2} = 0$.
   στ. $u_x + e^y u_y = 0$.
   ζ. $u_y + u_{xxxx} + \sqrt{1+u} = 0$.

   Σε όλες τις επόμενες ασκήσεις η άγνωστη συνάρτηση είναι $u(x,y)$ ($u(x,t)$ στην 11) και η απάντηση βρίσκεται μέσα σε αγκύλη.

3. Λύστε τις παρακάτω μ.δ.ε.

   α. $uu_{xy} + u_x u_y = 0$. [$u(x,y) = \pm\sqrt{f(x)+g(y)}$.]
   β. $uu_{xy} - u_x u_y = 0$. [$u(x,y) = f(x)g(y)$.]

4. Λύστε το πρόβλημα αρχικής συνθήκης:

$$\begin{cases} 2u_x + 3u_y = 0 \\ u(x,0) = \sin x \end{cases}$$

   [$u(x,y) = \sin(x - \frac{2}{3}y)$.]

5. Λύστε την $3u_y + u_{xy} = 0$. [$u(x,y) = f(x) + g(y)e^{-3x}$.]

6. Λύστε τα παρακάτω δύο προβλήματα αρχικής συνθήκης. Για καθένα βρείτε σε ποιό υποσύνολο του xy-επιπέδου η λύση είναι μονοσήμαντα ορισμένη.

$$\text{α.} \quad \begin{cases} (1+x^2)u_x + u_y = 0 \\ u(x,0) = g(x) \end{cases} \qquad\qquad \text{β.} \quad \begin{cases} (1+x^2)u_x + u_y = 0 \\ u(0,y) = g(y) \end{cases}$$

   [α. $u(x,y) = g(\tan(\operatorname{Arctan} x - y))$ στο $\{(x,y) \mid \operatorname{Arctan} x - \frac{\pi}{2} < y < \operatorname{Arctan} x + \frac{\pi}{2}\}$.]
   [β. $u(x,y) = g(y - \operatorname{Arctan} x)$ στο $\mathbb{R}^2$.]

7. Λύστε στο $\{(x,y) \mid -1 < x < 1\}$ το πρόβλημα αρχικής συνθήκης:

$$\begin{cases} \sqrt{1-x^2}u_x + u_y = 0 \\ u(0,y) = y \end{cases}$$

   [$u(x,y) = y - \operatorname{Arcsin} x$.]

8. Λύστε το πρόβλημα αρχικής συνθήκης:

$$\begin{cases} yu_x + xu_y = 0 \\ u(0,y) = e^{-y^2} \end{cases}$$

Βρείτε σε ποιό υποσύνολο του xy-επιπέδου η λύση είναι μονοσήμαντα ορισμένη. [$u(x,y) = e^{x^2-y^2}$ στο $\{(x,y) \mid |x| \leq |y|\}$.]

9. Λύστε το πρόβλημα αρχικής συνθήκης:

$$\begin{cases} yu_x - xu_y = 0 \\ u(0,y) = e^{-y^2} \end{cases}$$

[$u(x,y) = e^{-x^2-y^2}$.]

10. Λύστε το πρόβλημα αρχικής συνθήκης:

$$\begin{cases} u_x + u_y + u = e^{x+2y} \\ u(x,0) = 0 \end{cases}$$

[$u(x,y) = \frac{1}{2}e^x \sinh(2y)$.]

11. Αν η $f(x,t)$ έχει συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης στο xt-επίπεδο, λύστε το πρόβλημα αρχικής συνθήκης:

$$\begin{cases} u_t + cu_x = f(x,t) \\ u(x,0) = g(x) \end{cases}$$

[$u(x,t) = \int_0^t f(x-cs, t-s)\,ds + g(x-ct)$.]