

## Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις.

### Δεύτερο φυλλάδιο ασκήσεων

1. Θεωρήστε το πρόβλημα αρχικής συνθήκης για την εξίσωση του Burgers:

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 \\ u(x, 0) = 1 \end{cases} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Αποδείξτε ότι όλες οι χαρακτηριστικές καμπύλες είναι ευθείες παράλληλες μεταξύ τους. Βρείτε το σύνολο  $\Omega$  στο οποίο ορίζεται η λύση  $u(x, t)$  καθώς και τον τύπο της. Υφίσταται φαινόμενο κρουστικού κύματος ή θραύσης σ' αυτό το πρόβλημα; [ $\Omega = \mathbb{R}^2$ ,  $u(x, t) = 1$ . Όχι.]

2. Θεωρήστε το πρόβλημα αρχικής συνθήκης για την εξίσωση του Burgers:

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 \\ u(x, 0) = -x \end{cases} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Αποδείξτε ότι όλες οι χαρακτηριστικές καμπύλες είναι ευθείες και διέρχονται από το ίδιο σημείο  $(0, 1)$ . Βρείτε το σύνολο  $\Omega$  στο οποίο ορίζεται η λύση  $u(x, t)$  καθώς και τον τύπο της και αποδείξτε ότι η λύση καθώς και οι μερικές παράγωγοί της εκρήγνυνται στο σύνορο του  $\Omega$ . [ $\Omega = \{(x, t) \mid t < 1\}$  και  $u(x, t) = \frac{x}{t-1}$ .]

- 3.\* Θεωρήστε το πρόβλημα αρχικής συνθήκης για την εξίσωση του Burgers:

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 \\ u(x, 0) = \frac{1}{e^x + 1} \end{cases} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Βρείτε δύο σύνολα  $\Omega$  στα οποία ορίζονται αντίστοιχες λύσεις  $u(x, t)$  και αποδείξτε ότι οι μερικές παράγωγοι των λύσεων εκρήγνυνται στα σύνορα των αντίστοιχων  $\Omega$ .