Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις.

Τρίτο φυλλάδιο ασκήσεων

1. Έστω $u(x,t)$ λύση της κυματικής εξίσωσης $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ με $c > 0$. Αποδείξτε ότι για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ οι συναρτήσεις $v(x,t) = u(x-a,t)$ και $w(x,t) = u(bx,bt)$ είναι επίσης λύσεις της κυματικής εξίσωσης.

2. Έστω $u(x,t)$ λύση της κυματικής εξίσωσης $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ με $c > 0$. Αν η u έχει συνεχείς μερικές παραγώγους τρίτης τάξης, αποδείξτε ότι και οι u_x, u_t είναι λύσεις της κυματικής εξίσωσης.

3. Έστω ότι οι αρχικές συνθήκες ϕ, ψ είναι άρτιες στο $\mathbb{R}$ ως προς το x_0, δηλαδή ότι ισχύει $\phi(2x_0 - x) = \phi(x)$ και $\psi(2x_0 - x) = \psi(x)$ για κάθε x. Αποδείξτε ότι η λύση $u(x,t)$ του προβλήματος
$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & \text{για } (x,t) \in \mathbb{R}^2 \\ u(x,0) = \phi(x) & \text{για } x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = \psi(x) & \text{για } x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{1}$$
είναι άρτια ως προς τον άξονα με εξίσωση $x = x_0$, δηλαδή ότι ισχύει $u(2x_0 - x, t) = u(x,t)$ για κάθε (x,t).

4. Έστω ότι κάποια από τις $\phi, \phi', \phi'', \psi, \psi'$ παρουσιάζει ασυνέχεια στο $x_0 \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η λύση του προβλήματος (1) που δίνεται από τον τύπο του d' Alembert ή κάποιες από τις μερικές παραγώγους της μέχρι δεύτερης τάξης παρουσιάζουν ασυνέχεια στα σημεία των χαρακτηριστικών ευθειών με εξισώσεις $x - ct = x_0$ και $x + ct = x_0$. Μελετήστε διεξοδικά το θέμα. Για παράδειγμα, αν η ϕ έχει άλμα p στο x_0, δηλαδή $\lim_{x\to x_0+} \phi(x) - \lim_{x\to x_0-} \phi(x) = p$, πώς θα συμπεριφέρεται η $u(x,t)$ στα σημεία $x_0 - ct$ και $x_0 + ct$;

5. Λύστε το πρόβλημα αρχικών συνθηκών
$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & \text{για } (x,t) \in \mathbb{R}^2 \\ u(x,0) = x & \text{για } x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = e^x & \text{για } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

6. Λύστε το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών συνθηκών
$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & \text{για } x > 0 \text{ και } t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = \sin x & \text{για } x \geq 0 \\ u_t(x,0) = \sin 2x & \text{για } x \geq 0 \\ u(0,t) = 0 & \text{για } t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

7. Λύστε το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών συνθηκών
$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & \text{για } 0 < x < \pi \text{ και } t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = \sin x + 3\sin 5x & \text{για } 0 \leq x \leq \pi \\ u_t(x,0) = 0 & \text{για } 0 \leq x \leq \pi \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & \text{για } t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

8. Λύστε το μη-ομογενές πρόβλημα αρχικών συνθηκών
$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = e^{ax} & \text{για } (x,t) \in \mathbb{R}^2 \\ u(x,0) = 0 & \text{για } x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = 0 & \text{για } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

9. Λύστε το μη-ομογενές πρόβλημα αρχικών συνθηκών

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = x + 2t & \text{για } (x,t) \in \mathbb{R}^2 \\ u(x,0) = \sin x & \text{για } x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = \cos 2x & \text{για } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

10. Έστω λύση $u(x,t)$ του προβλήματος (1). Χρησιμοποιήστε τον τύπο του d' Alembert για να αποδείξτε ότι για κάθε $(\overline{x}, \overline{t})$ με $\overline{t} > 0$ ισχύει

$$|u(\overline{x}, \overline{t})| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |\phi(x)| + \overline{t} \sup_{x \in \mathbb{R}} |\psi(x)|.$$

Τώρα έστω λύση $u(x,t)$ του προβλήματος (1) και λύση $u_0(x,t)$ του προβλήματος (1) αλλά με αρχικές συνθήκες ϕ_0, ψ_0. Αποδείξτε ότι για κάθε $(\overline{x}, \overline{t})$ με $\overline{t} > 0$ ισχύει

$$|u(\overline{x}, \overline{t}) - u_0(\overline{x}, \overline{t})| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |\phi(x) - \phi_0(x)| + \overline{t} \sup_{x \in \mathbb{R}} |\psi(x) - \psi_0(x)|.$$