Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις.

Τέταρτο φυλλάδιο ασκήσεων

1. Λύστε το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών συνθηκών

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 0 & \text{για } 0 < x < \pi \text{ και } t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = \begin{cases} x & 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ \pi - x, & \frac{\pi}{2} \le x \le \pi \end{cases} & \\ u_t(x,0) = 0 & \text{για } 0 \le x \le \pi \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & \text{για } t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Σε ποιά σημεία της ζώνης $\{(x,t)\,|\,0 < x < \pi, t \in \mathbb{R}\}$ παρουσιάζει πρόβλημα η λύση;

2. Αποδείξτε με την ενεργειακή μέθοδο τη μοναδικότητα της λύσης του προβλήματος

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & \text{για } 0 < x < \pi \text{ και } t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = \phi(x) & \text{για } 0 \le x \le \pi \\ u_t(x,0) = \psi(x) & \text{για } 0 \le x \le \pi \\ u(0,t) = f(t) & \text{για } t \in \mathbb{R} \\ u(\pi,t) = g(t) & \text{για } t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

3. Λύστε το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών συνθηκών

$$\begin{cases} u_t - 2u_{xx} = 0 & \text{για } 0 < x < \pi \text{ και } t > 0 \\ u(x,0) = 2\sin x - \sin 2x + 8\sin 5x & \text{για } 0 \le x \le \pi \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & \text{για } t \ge 0 \end{cases}$$

Αποδείξτε ότι η λύση τείνει στο 0 όταν $t \to +\infty$ ομοιόμορφα στο $[0,\pi]$, δηλαδή ότι

$$\max_{0 \le x \le \pi} |u(x,t)| \to 0 \qquad \text{όταν } t \to +\infty.$$

4. Λύστε το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών συνθηκών

$$\begin{cases} u_t - 4u_{xx} = 0 & \text{για } 0 < x < \pi \text{ και } t > 0 \\ u(x,0) = \begin{cases} x & 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ \pi - x, & \frac{\pi}{2} \le x \le \pi \end{cases} & \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & \text{για } t \ge 0 \end{cases}$$

Σε ποιά σημεία της ζώνης $\{(x,t)\,|\,0 < x < \pi, t > 0\}$ παρουσιάζει πρόβλημα η λύση; Αποδείξτε ότι η λύση τείνει στο 0 όταν $t \to +\infty$ ομοιόμορφα στο $[0,\pi]$, δηλαδή ότι

$$\max_{0 \le x \le \pi} |u(x,t)| \to 0 \qquad \text{όταν } t \to +\infty.$$

5. Έστω $u(x,t)$ λύση του προβλήματος αρχικών και συνοριακών συνθηκών

$$\begin{cases} u_t - c^2 u_{xx} = 0 & \text{για } 0 < x < \pi \text{ και } t > 0 \\ u(x,0) = \phi(x) & \text{για } 0 \le x \le \pi \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & \text{για } t \ge 0 \end{cases}$$

Ορίζουμε

$$m(t) = \min_{0 \le x \le \pi} u(x,t), \quad M(t) = \max_{0 \le x \le \pi} u(x,t) \qquad \text{για } t \ge 0.$$

Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $m(t)$ είναι αύξουσα και ότι η συνάρτηση $M(t)$ είναι φθίνουσα στο $[0, +\infty)$.
Υπόδειξη: Εφαρμόστε την αρχή μεγίστου-ελαχίστου στη συνάρτηση $v(x,t) = u(x, t + t_1)$ για να αποδείξετε ότι $m(t_1) \le m(t_2)$ και $M(t_1) \ge M(t_2)$ όταν $0 \le t_1 < t_2$. Πρέπει να δείτε ποιού προβλήματος είναι λύση η $v(x,t)$ στη ζώνη $\{(x,t) \,|\, 0 \le x \le \pi, t \ge 0\}$.