Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις.

Πέμπτο φυλλάδιο ασκήσεων

1. Έστω Ω ένα ανοικτό, φραγμένο και συνεκτικό χωρίο στον $\mathbb{R}^2$ ή στον $\mathbb{R}^3$ με ομαλό σύνορο $\partial\Omega$. Αν η w έχει συνεχείς παραγώγους πρώτης τάξης στο Ω, τότε ορίζουμε την **ενέργεια** της w να είναι το
$$E(w) = \frac{1}{2}\iint_\Omega |\nabla w|^2 \, dA = \frac{1}{2}\iint_\Omega (w_x^2 + w_y^2)\, dA$$
ή
$$E(w) = \frac{1}{2}\iiint_\Omega |\nabla w|^2 \, dV = \frac{1}{2}\iiint_\Omega (w_x^2 + w_y^2 + w_z^2)\, dV.$$
Θεωρούμε οποιαδήποτε λύση του προβλήματος συνοριακής συνθήκης
$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{στο } \Omega \\ u = f & \text{στο } \partial\Omega \end{cases}$$
Η u υποτίθεται ότι έχει συνεχείς παραγώγους πρώτης τάξης στο $\overline{\Omega}$ και συνεχείς παραγώγους δεύτερης τάξης στο Ω.
Αν v είναι οποιαδήποτε συνάρτηση συνεχής στο $\overline{\Omega}$ με συνεχείς παραγώγους πρώτης τάξης στο Ω η οποία ικανοποιεί τη συνοριακή συνθήκη
$$v = f \quad \text{στο } \partial\Omega$$
αποδείξτε ότι
$$E(u) \leq E(v).$$
Υπόδειξη: Θεωρήστε την $w = v - u$ και αποδείξτε ότι $E(v) = E(u) + E(w)$.

2. Έστω Ω ένα ανοικτό, φραγμένο και συνεκτικό χωρίο στον $\mathbb{R}^2$ ή στον $\mathbb{R}^3$ με ομαλό σύνορο $\partial\Omega$. Αποδείξτε με την ενεργειακή μέθοδο τη μοναδικότητα της λύσης του προβλήματος
$$\begin{cases} \Delta u - ku = f & \text{στο } \Omega \\ u = g & \text{στο } \partial\Omega \end{cases}$$
όπου k είναι μη-αρνητική συνάρτηση συνεχής στο Ω.

3. Έστω Ω ένα ανοικτό και συνεκτικό χωρίο στον $\mathbb{R}^2$ ή στον $\mathbb{R}^3$ και έστω αρμονική συνάρτηση u στο Ω. Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα μέσης τιμής της u αποδείξτε ότι η u δεν έχει μέγιστη ούτε ελάχιστη τιμή στο Ω.
Υπόδειξη: Αν η u έχει μέγιστη τιμή σε κάποιο σημείο $P \in \Omega$, αποδείξτε ότι η u είναι σταθερή στον μέγιστο δίσκο ή στη μέγιστη μπάλα κέντρου P που περιέχεται στο Ω.

4. Έστω Ω ένα ανοικτό, φραγμένο και συνεκτικό χωρίο στον $\mathbb{R}^2$ ή στον $\mathbb{R}^3$ με ομαλό σύνορο $\partial\Omega$. Έστω, επίσης, μια αρμονική συνάρτηση u στο Ω με συνεχείς παραγώγους πρώτης τάξης στο $\overline{\Omega}$. Αποδείξτε ότι
$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\, ds = 0 \quad \text{ή} \quad \iint_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\, dA = 0.$$

5. Στον $\mathbb{R}^2$ έχουμε τους τύπους που συνδέουν καρτεσιανές και πολικές συντεταγμένες:
$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta.$$
Για μια συνάρτηση u στον $\mathbb{R}^2$ αποδείξτε ότι
$$u_x^2 + u_y^2 = u_r^2 + \frac{1}{r^2}\, u_\theta^2, \qquad u_{xx} + u_{yy} = u_{rr} + \frac{1}{r}\, u_r + \frac{1}{r^2}\, u_{\theta\theta}.$$
Ποιές είναι οι αρμονικές συναρτήσεις στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ οι οποίες εξαρτώνται μόνο από τη μεταβλητή r;

6. Στον $\mathbb{R}^3$ έχουμε τους τύπους που συνδέουν καρτεσιανές και κυλινδρικές συντεταγμένες:

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad z = z.$$

Για μια συνάρτηση u στον $\mathbb{R}^3$ αποδείξτε ότι

$$u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = u_r^2 + \frac{1}{r^2}\,u_\theta^2 + u_z^2, \qquad u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = u_{rr} + \frac{1}{r}\,u_r + \frac{1}{r^2}\,u_{\theta\theta} + u_{zz}.$$

7. Στον $\mathbb{R}^3$ έχουμε τους τύπους που συνδέουν καρτεσιανές και σφαιρικές συντεταγμένες:

$$x = r\cos\theta\sin\phi, \qquad y = r\sin\theta\sin\phi, \qquad z = r\cos\phi.$$

Για μια συνάρτηση u στον $\mathbb{R}^3$ αποδείξτε ότι

$$u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = u_r^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\phi}\,u_\theta^2 + \frac{1}{r^2}\,u_\phi^2,$$

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = u_{rr} + \frac{2}{r}\,u_r + \frac{1}{r^2\sin^2\phi}\,u_{\theta\theta} + \frac{1}{r^2}\,u_{\phi\phi} + \frac{\cot\phi}{r^2}\,u_\phi.$$

Ποιές είναι οι αρμονικές συναρτήσεις στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0,0)\}$ οι οποίες εξαρτώνται μόνο από τη μεταβλητή r;