Θεωρία Πιθανοτήτων, εαρινό εξάμηνο 2017-18.

Πρώτο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. (i) Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε επιτροπή k ατόμων από n ($n \geq k$) άτομα;
(ii) Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε επιτροπή k ατόμων από n ($n \geq k$) άτομα όταν τα άτομα στην επιτροπή έχουν συγκεκριμένες αρμοδιότητες (πρόεδρος, ταμίας κλπ);

2. (i) Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε k παπούτσια από n ($n \geq k$) διαφορετικά ζευγάρια παπουτσιών;
(ii) Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε k παπούτσια από n ($n \geq k$) διαφορετικά ζευγάρια παπουτσιών ώστε να έχουμε τουλάχιστον ένα ζευγάρι; Τουλάχιστον δύο ζευγάρια;

3. Έστω $k, m, n \in \mathbb{N}$, $k + m \leq n$.
(i) Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε και να κρατήσουμε για τον εαυτό μας δυο ξένα υποσύνολα k στοιχείων και m στοιχείων ενός συνόλου n στοιχείων;
(ii) Ποιά είναι η απάντηση στο προηγούμενο αν δεν απαιτήσουμε τα δυο υποσύνολα να είναι ξένα;
(iii) Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε και να δώσουμε, ένα στην Ρένα και ένα στην Ουρανία, δυο ξένα υποσύνολα k στοιχείων και m στοιχείων ενός συνόλου n στοιχείων;
(iv) Ποιά είναι η απάντηση στο προηγούμενο αν δεν απαιτήσουμε τα δυο υποσύνολα να είναι ξένα;

4. Έστω $k, m, n \in \mathbb{N}$, $k + m \leq n$. Με πόσους τρόπους μπορούμε να σχηματίσουμε δυο διανύσματα k συντεταγμένων και m συντεταγμένων από τα στοιχεία ενός συνόλου n αριθμών, απαιτώντας τα δυο διανύσματα να μην έχουν κοινές συντεταγμένες;

5. Με πόσους τρόπους μπορούμε να βάψουμε n αριθμημένες μπάλες με k χρώματα; Βρείτε δύο διαφορετικούς τύπους που οδηγούν στο ίδιο αποτέλεσμα.
Σε συνδυασμό με το προηγούμενο, εξηγήστε την γενίκευση του δυωνυμικού τύπου του Newton:
$$(x_1 + \cdots + x_k)^n = \sum_{p_1 + \cdots + p_k = n} \binom{n}{p_1, \ldots, p_k} x_1^{p_1} \cdots x_k^{p_k}.$$

1. (i) $\binom{n}{k}$.
   (ii) $\frac{n!}{(n-k)!}$.

2. (i) $\binom{2n}{k}$.
   (ii) $\binom{2n}{k} - 2^k\binom{n}{k}$, $\binom{2n}{k} - 2^k\binom{n}{k} - 2^{k-2}n\binom{n-1}{k-2}$.

3. (i) $\binom{n}{k}\binom{n-k}{m}$.
   (ii) $\binom{n}{k}\binom{n}{m}$ αν $k \neq m$, $\frac{1}{2}\binom{n}{k}^2 + \frac{1}{2}\binom{n}{k}$ αν $k = m$.
   (iii) $2\binom{n}{k}\binom{n-k}{m}$.
   (iv) $2\binom{n}{k}\binom{n}{m}$ αν $k \neq m$, $\binom{n}{k}^2$ αν $k = m$.

4. $(n)_{k+m}$.

5. $k^n = \sum_{p_1+\cdots+p_k=n}\binom{n}{p_1,\ldots,p_k}$, όπου $\binom{n}{p_1,\ldots,p_k} = \frac{n!}{p_1!\cdots p_k!}$.