

## Θεωρία Πιθανοτήτων, εαρινό εξάμηνο 2017-18.

### Τρίτο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Θεωρούμε  $n$  κάλπες και υποθέτουμε ότι η  $k$  κάλπη περιέχει  $k$  άσπρες και  $n-k$  μαύρες μπάλες. Επιλέγουμε στην τύχη μια κάλπη και τραβάμε διαδοχικά και χωρίς επανάθεση δυο μπάλες. Ποιά είναι πιθανότητα να είναι και οι δυο άσπρες;
2. Η λέξη “και” αποτελεί το 10% των λέξεων των κειμένων της συγγραφέως Νταμά και το 20% των λέξεων των κειμένων της συγγραφέως Μηδουλίδου. Ένα κείμενο που βρέθηκε εν έτει 2532 μ.Χ. αποδίδεται κατά 60% στην Νταμά και κατά 40% στην Μηδουλίδου. Αν σε ένα τυχαίο δείγμα εννέα λέξεων του κειμένου βρέθηκε ένα “και”, ποιά είναι η πιθανότητα το κείμενο να είναι της Νταμά;
3. Σε μια ερώτηση πολλαπλής επιλογής υπάρχουν  $n$  επιλογές από τις οποίες μόνο μία είναι σωστή. Ο φοιτητής Αναξίμανδρος σημειώνει την σωστή επιλογή αν την γνωρίζει ή επιλέγει στην τύχη μία από τις  $n$  επιλογές. Υποθέτουμε ότι η πιθανότητα να γνωρίζει ο Αναξίμανδρος την σωστή απάντηση είναι  $p$ . Αν ο Αναξίμανδρος απάντησε σωστά, ποιά είναι η πιθανότητα να γνώριζε την σωστή επιλογή;
4. Το ποσοστό των κατοίκων της νήσου Ευτυχία που πάσχει από την σοβαρή ασθένεια της κατάθλιψης είναι 0, 01. Ο προβληματισμένος Ευτυχιώτης ονόματι Χαμογελαστό Καλαμάρι υποβάλλεται σε δύο ανεξάρτητα τεστ για την ασθένεια καθένα από τα οποία κάνει ορθή διάγνωση με πιθανότητα 0, 95. Ποιά είναι η πιθανότητα να πάσχει το Χαμογελαστό Καλαμάρι αν (i) ένα τουλάχιστον τεστ είναι θετικό; (ii) και τα δύο τεστ είναι θετικά;
5. Αν τα ενδεχόμενα  $A, B, C$  είναι ανεξάρτητα, αποδείξτε ότι τα  $A \cap B, C$  καθώς και τα  $A^c, B^c, C^c$  είναι ανεξάρτητα.
6. Έστω  $A_1, A_2, \dots$  ξένα ανά δύο ενδεχόμενα και ένα ενδεχόμενο  $A \subseteq \bigcup_n A_n$ . Αποδείξτε ότι για κάθε ενδεχόμενο  $B$  ισχύει

$$P(B|A) = \sum_n P(B|A \cap A_n)P(A_n|A).$$

Αυτός είναι ο τύπος ολικής πιθανότητας για δεσμευμένες πιθανότητες.

Ειδικότερα, αν  $A = \bigcup_n A_n$ , τότε

$$P(B|A) = \sum_n P(B|A_n)P(A_n) / \sum_n P(A_n).$$

1.  $\frac{1}{n^2(n-1)} \sum_{k=1}^n k(k-1)$ .
2.  $\frac{129140163}{196249027} \approx 0,65804231$ .
3.  $\frac{np}{1+(n-1)p}$ .
4. (i)  $\frac{133}{1420} \approx 0,093661972$ . (ii)  $\frac{361}{460} \approx 0,784782609$ .