Θεωρία Πιθανοτήτων, εαρινό εξάμηνο 2017-18.

Τέταρτο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Ρίχνουμε ένα νόμισμα τρεις φορές και θεωρούμε το ενδεχόμενο να προκύψουν και οι δυο όψεις του νομίσματος καθώς και το ενδεχόμενο να προκύψει το πολύ ένα Γ. Είναι τα δύο ενδεχόμενα ανεξάρτητα;

2. Λέμε ότι τα ενδεχόμενα A, B είναι ανεξάρτητα με δεδομένο το ενδεχόμενο C αν ισχύει $P(A \cap B|C) = P(A|C)P(B|C)$.
Δέκα βώλοι αριθμημένοι από το 1 έως το 10 βρίσκονται μέσα σε ένα δοχείο. Εξάγουμε διαδοχικά τρεις βώλους από το δοχείο με επανατοποθέτηση (δηλαδή όταν έξάγουμε έναν βώλο τον επανεισάγουμε αμέσως μέσα στο δοχείο). Έστω A το ενδεχόμενο να προκύψει ο βώλος 1 στην δεύτερη εξαγωγή, B το ενδεχόμενο να προκύψει ίδιος βώλος σε ακριβώς δύο από τις τρεις εξαγωγές και C το ενδεχόμενο να προκύψει ο βώλος 1 στην πρώτη εξαγωγή. Είναι τα A, B ανεξάρτητα; Είναι τα A, B ανεξάρτητα, δεδομένου του C;

3. Έστω ότι για μια συγκεκριμένη ασθένεια ο γιατρός κος Πάπαλα συστήνει επικίνδυνη χειρουργική επέμβαση αν, μετά από κλινική εξέταση και από εργαστηριακές εξετάσεις, είναι 80% βέβαιος ότι ο ασθενής του πάσχει από αυτήν ενώ, σε αντίθετη περίπτωση, συστήνει περαιτέρω πολυέξοδες εξετάσεις. Οι εργαστηριακές εξετάσεις κάνουν ορθή διάγνωση στο 99% των περιπτώσεων για μη-διαβητικούς και στο 70% των περιπτώσεων για διαβητικούς. Μετά από κλινική εξέταση ο κος Πάπαλα είναι 60% βέβαιος ότι ο κος Μπάμπης πάσχει από την ασθένεια. Γίνονται και οι εργαστηριακές εξετάσεις οι οποίες έχουν θετικό (για την ασθένεια) αποτέλεσμα. Θα χειρουργήσει ο κος Πάπαλα τον κο Μπάμπη, πιστεύοντας ότι ο κος Μπάμπης δεν είναι διαβητικός, ή θα συστήσει κι άλλες εξετάσεις; Τί θα κάνει ο κος Πάπαλα, αν ο κος Μπάμπης μετά τα αποτελέσματα των εξετάσεων θυμηθεί ότι είναι διαβητικός;

4. Έστω $F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$ η συνάρτηση κατανομής μιας τυχαίας μεταβλητής X. Αποδείξτε ότι:
(i) $P(a < X < b) = F_X(b-) - F_X(a) = F_X(b) - F_X(a) - P(x = b)$ όταν $a < b$.
(ii) $P(a \le X \le b) = F_X(b) - F_X(a-) = F_X(b) - F_X(a) + P(x = a)$ όταν $a < b$.
(iii) $P(a \le X < b) = F_X(b-) - F_X(a-) = F_X(b) - F_X(a) - P(x = b) + P(X = a)$ όταν $a < b$.
(iv) $F_X(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$ και $F_X(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$.

5. Ρίχνουμε ένα ζάρι δύο φορές και θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή με τύπο $X(\omega_1, \omega_2) = \omega_1 + \omega_2$, όπου ω_1, ω_2 είναι οι ενδείξεις του πρώτου και του δεύτερου ζαριού. Βρείτε τις πιθανότητες $P(X = 4)$, $P(3 < X \le 10)$.

6. Θεωρούμε ένα νόμισμα το οποίο δείχνει Κ με πιθανότητα p και Γ με πιθανότητα $1 - p$, όπου $0 < p < 1$. Ρίχνουμε το νόμισμα μέχρι να δείξει για πρώτη φορά Κ. Ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή X να είναι ο απαιτούμενος αριθμός ρίψεων. Υπολογίστε την πιθανότητα $P(X = n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ καθώς και την συνάρτηση κατανομής $F_X(x)$ για $x \in \mathbb{R}$.

7. Ένα δοχείο περιέχει N βώλους αριθμημένους από 1 έως N. Επιλέγουμε τυχαία m βώλους από το δοχείο χωρίς επανατοποθέτηση. Ονομάζουμε X και Y τον μέγιστο και τον ελάχιστο αριθμό βώλου από τους m που επιλέγουμε.
(i) Βρείτε την πιθανότητα $P(X \le n)$ για κάθε $n = 1, \dots, N$ και την συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής X.
(ii) Βρείτε την πιθανότητα $P(Y \ge n)$ για κάθε $n = 1, \dots, N$ και την συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής Y.

8. Έστω $F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$ η συνάρτηση κατανομής μιας τυχαίας μεταβλητής X.
(i) Μπορεί να υπάρχουν περισσότερα από n άλματα (δηλαδή ασυνέχειες) της συνάρτησης F_X μεγέθους $\ge \frac{1}{n}$;
(ii) Μπορεί να υπάρχουν υπεραριθμήσιμα σημεία ασυνέχειας της συνάρτησης F_X;

1. Ναι.

2. Ναι. Όχι.

3. Θα τον χειρουργήσει. Θα προτείνει συμπληρωματικές εξετάσεις.

5. $1/12, 5/6$.

6. $P(X=n)=p(1-p)^{n-1}$. $F_X(x)=0$ στο διάστημα $(-\infty,1)$ και $F_X(x)=1-(1-p)^n$ στο διάστημα $[n,n+1)$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$.

7. (i) $P(X\leq n)=0$ όταν $1\leq n<m$ και $P(X\leq n)=\binom{n}{m}/\binom{N}{m}$ όταν $m\leq n\leq N$.
   Η συνάρτηση F_X είναι σταθερή 0 στο διάστημα $(-\infty,m)$, είναι σταθερή $\binom{n}{m}/\binom{N}{m}$ στο διάστημα $[n,n+1)$ για κάθε $n=m,\ldots,N-1$, και σταθερή 1 στο διάστημα $[N,+\infty)$.
   (ii) $P(Y\geq n)=\binom{N-n+1}{m}/\binom{N}{m}$ όταν $1\leq n\leq N-m+1$ και $P(Y\geq n)=0$ όταν $N-m+1<n\leq N$.
   Η συνάρτηση $P(Y\geq x)$ είναι σταθερή 1 στο διάστημα $(-\infty,1]$, σταθερή $\binom{N-n+1}{m}/\binom{N}{m}$ στο διάστημα $(n-1,n]$ για κάθε $n=2,\ldots,N-m+1$, και σταθερή 0 στο διάστημα $(N-m+1,+\infty)$.
   Η συνάρτηση F_Y υπολογίζεται από την σχέση $F_Y(x)=P(Y\leq x)=1-P(Y>x)=1-P(Y\geq x)+P(Y=x)$.

8. Όχι. Όχι.