

Θεωρία Πιθανοτήτων, εαρινό εξάμηνο 2017-18.

Έβδομο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Αν η συνεχής τ.μ. X έχει συνάρτηση κατανομής F_X και συνάρτηση πυκνότητας f_X , να βρείτε τις αντίστοιχες συναρτήσεις F_Y και f_Y της συνεχούς τ.μ. $Y = aX + b$ και να αποδείξετε ότι $\mathbb{E}(Y) = a\mathbb{E}(X) + b$ και $\text{Var}(Y) = a^2 \text{Var}(X)$.
2. Αν η τ.μ. X ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[a, b]$, αποδείξτε ότι η τ.μ. $Y = \frac{X-a}{b-a}$ ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[0, 1]$.
3. Το ποσό X της μικρότερης προσφοράς σε μειοδοτικό διαγωνισμό για την κατασκευή ενός δρόμου με κόστος κατασκευής k ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο $[3k/4, 7k/4]$.
(i) Ποιά είναι η πιθανότητα να κερδίσει τον διαγωνισμό εργοληπτική εταιρεία που υποβάλλει προσφορά κατασκευής με ποσό $a \in [3k/4, 7k/4]$;
(ii) Αν η ζημιά της εργοληπτικής εταιρείας όταν χάνει τον διαγωνισμό είναι b να υπολογισθεί το ποσό $a \in [3k/4, 7k/4]$ της προσφοράς κατασκευής που πρέπει να υποβάλει ώστε να μεγιστοποιήσει το αναμενόμενο κέρδος της.
4. Ο χρόνος ζωής X ενός προϊόντος ακολουθεί την εκθετική κατανομή με μέση τιμή $\mu > 0$. Ποιός πρέπει να είναι ο χρόνος εγγύησης $a > 0$ που πρέπει να προσφέρει ο κατασκευαστής ώστε με πιθανότητα 0,95 το προϊόν να διατηρείται πέρα από τον χρόνο εγγύησης;
5. Ο χρόνος λειτουργίας κινητήρα αεροπλάνου ακολουθεί εκθετική κατανομή με μέση τιμή $\mu > 0$. Για πτήση αεροπλάνου πρέπει να λειτουργούν τουλάχιστον δύο από τους τέσσερις κινητήρες του. Ποιά είναι η πιθανότητα να φτάσει στον προορισμό του το αεροπλάνο μετά από πτήση χρονικής διάρκειας a ;
6. Έστω ότι η ποσότητα X ενός προϊόντος που πωλείται σε μία ημέρα ακολουθεί την κατανομή Γ με μέση τιμή 4000 μονάδες και τυπική απόκλιση 2000 μονάδες. Αν η διαθεσιμότητα του προϊόντος σε μία ημέρα είναι 6000 μονάδες, βρείτε την πιθανότητα ο πωλητής να μην ανταποκριθεί στην ζήτηση.
7. Μία μηχανή κατασκευάζει βίδες των οποίων το μήκος X ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή 40mm και τυπική απόκλιση 1mm. Μία βίδα θεωρείται ελαττωματική αν το μήκος της (σε mm) είναι εκτός του διαστήματος $[39, 41]$. Ποιό είναι το ποσοστό των ελαττωματικών βιδών που παράγει η μηχανή;
8. Έστω ότι η αντοχή X ενός υφάσματος ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή 50 και τυπική απόκλιση 2. Ένα τόπι υφάσματος αποφέρει κέρδος 15 ευρώ αν $X > 47$ και κέρδος 6 ευρώ αν $X \leq 47$. Να υπολογισθεί το αναμενόμενο κέρδος ανά τόπι υφάσματος.
9. (i) Αν η τ.μ. X ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda > 0$, αποδείξτε ότι $P(X \geq x + y | P \geq x) = P(X \geq y)$ για κάθε $x, y \geq 0$.
(ii) Αν η δ.τ.μ. ακολουθεί την γεωμετρική κατανομή με πιθανότητα επιτυχίας p , αποδείξτε ότι $P(X \geq k + m | P \geq k) = P(X \geq m)$ για κάθε $k, m = 0, 1, 2, 3, \dots$.

1. Αν $a > 0$, τότε $F_Y(y) = F_X((y-b)/a)$ και $f_Y(y) = (1/a)f_X((y-b)/a)$. Αν $a < 0$, τότε $F_Y(y) = 1 - F_X((y-b)/a)$ και $f_Y(y) = -(1/a)f_X((y-b)/a)$.
3. (i) $(7/4) - (a/k)$. (ii) $a = (11k - 4b)/8$ αν $b \leq 5k/4$, και $a = 3k/4$ αν $b \geq 5k/4$.
4. $a \leq \mu \log \frac{100}{95} \approx 0,0526 \mu$.
5. $6e^{-2a/\mu} - 8e^{-3a/\mu} + 3e^{-4a/\mu}$.
6. $61e^{-6} \approx 0,01515$.
7. $\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_1^{+\infty} e^{-x^2/2} dx \approx 31,74\%$.
8. $\frac{6}{\sqrt{2\pi}2} \int_{-\infty}^{-3} e^{-x^2/8} dx + \frac{15}{\sqrt{2\pi}2} \int_{-3}^{+\infty} e^{-x^2/8} dx = 6 + \frac{9}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{1,5} e^{-x^2/2} dx \approx 14,3988$ ευρώ.