Θεωρία Πιθανοτήτων, εαρινό εξάμηνο 2017-18.

Όγδοο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Έστω F_X, F_Y οι συναρτήσεις κατανομής των τ.μ. X, Y και $F_{X,Y}$ η από κοινού συνάρτηση κατανομής τους. Αποδείξτε ότι
(i) $\lim_{y\to+\infty} F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)$, $\lim_{y\to-\infty} F_{X,Y}(x,y) = 0$.
(ii) $\lim_{x\to+\infty} F_{X,Y}(x,y) = F_Y(y)$, $\lim_{x\to-\infty} F_{X,Y}(x,y) = 0$.
(iii) $\lim_{x'\to x+} F_{X,Y}(x',y) = F_{X,Y}(x,y)$.
(iv) $\lim_{y'\to y+} F_{X,Y}(x,y') = F_{X,Y}(x,y)$.
(v) $\lim_{x'\to x-} F_{X,Y}(x',y) = F_{X,Y}(x,y) - P(X = x, Y \leq y)$.
(vi) $\lim_{y'\to y-} F_{X,Y}(x,y') = F_{X,Y}(x,y) - P(X \leq x, Y = y)$.

2. Θεωρήστε την συνάρτηση $F(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x+y \geq 0 \\ 0, & \text{αν } x+y < 0 \end{cases}$ Είναι η F συνάρτηση κατανομής μιας διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής;

3. Ρίχνουμε δύο φορές ένα ζάρι και θεωρούμε το ζεύγος (i, j) των πιθανών ενδείξεων. Έστω $X = i + j$ και $Y = i - j$.
(i) Είναι η (X, Y) διακριτή; Βρείτε την απο κοινού συνάρτηση πιθανότητας $f_{X,Y}$ των X, Y.
(ii) Βρείτε την συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής $\mathbb{E}(X|Y)$ και υπολογίστε την $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y))$.
(iii) Βρείτε την συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής $\mathbb{E}(Y|X)$ και υπολογίστε την $\mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X))$.
(iv) Υπολογίστε τις $\mathbb{E}(X + Y)$, $\mathrm{Var}(X + Y)$, $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

4. Όπως στο προηγούμενο πρόβλημα, αλλά με $X = i$ και $Y = \max\{i, j\}$.

5. Η συνάρτηση πιθανότητας της δ.τ.μ. (X, Y) είναι η $f_{X,Y}(x,y) = \frac{x+y-2}{c}$ για $x, y = 1, 2, 3$, όπου $c > 0$ είναι μια σταθερά.
(i) Υπολογίσετε την c.
(ii) Βρείτε τις περιθώριες συναρτήσεις πιθανότητας $f_X(x)$ και $f_Y(y)$.
(iii) Βρείτε την δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας $f_{X|Y}(x|y)$. Βρείτε την συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής $\mathbb{E}(X|Y)$ και υπολογίστε την $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y))$.
(iv) Υπολογίστε τις $\mathbb{E}(X + Y)$, $\mathrm{Var}(X + Y)$, $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

6. Έστω ότι η δ.τ.μ. Y ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λ και ότι η δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας της δ.τ.μ. X όταν γνωρίζουμε ότι $Y = y$ είναι δυωνυμική με παραμέτρους y, p. Βρείτε την κατανομή της X.

2. Όχι.

3. (i) Η (X, Y) είναι διακριτή με σύνολο πιθανών τιμών: $\{(2,0), (3,-1), (3,1), (4,-2), (4,0), (4,2), (5,-3), (5,-1), (5,1), (5,3), (6,-4), (6,-2), (6,0), (6,2), (6,4), (7,-5), (7,-3), (7,-1), (7,1), (7,3), (7,5), (8,-4), (8,-2), (8,0), (8,2), (8,4), (9,-3), (9,-1), (9,1), (9,3), (10,-2), (10,0), (10,2), (11,-1), (11,1), (12,0)\}$. Για κάθε πιθανή τιμή (x, y) είναι $f_{X,Y}(x,y) = 1/36$.
(ii) Η τ.μ. $\mathbb{E}(X|Y)$ έχει μόνο μία πιθανή τιμή: 7. Άρα $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y)) = 7$.
(iii) Η τ.μ. $\mathbb{E}(Y|X)$ έχει μόνο μία πιθανή τιμή: 0. Άρα $\mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X)) = 0$.
(iv) $\mathbb{E}(X+Y) = 7$, $\mathrm{Var}(X+Y) = 35/3$, $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$.

4. (i) Η (X, Y) είναι διακριτή με σύνολο πιθανών τιμών: $\{(1,1)$, $(1,2)$, $(1,3)$, $(1,4)$, $(1,5)$, $(1,6)$, $(2,2)$, $(2,3)$, $(2,4)$, $(2,5)$, $(2,6)$, $(3,3)$, $(3,4)$, $(3,5)$, $(3,6)$, $(4,4)$, $(4,5)$, $(4,6)$, $(5,5)$, $(5,6)$, $(6,6)$. Οι αντίστοιχες τιμές της $f_{X,Y}$ είναι: $1/36$, $1/36$, $1/36$, $1/36$, $1/36$, $1/36$, $2/36$, $1/36$, $1/36$, $1/36$, $1/36$, $3/36$, $1/36$, $1/36$, $1/36$, $4/36$, $1/36$, $1/36$, $5/36$, $1/36$, $6/36$.
(ii) Η τ.μ. $\mathbb{E}(X|Y)$ έχει σύνολο πιθανών τιμών $\{1, 5/3, 12/5, 22/7, 35/9, 51/11\}$ με αντίστοιχες πιθανότητες $1/36$, $3/36$, $5/36$, $7/36$, $9/36$, $11/36$. Άρα $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y)) = 7/2$.
(iii) Η τ.μ. $\mathbb{E}(Y|X)$ έχει σύνολο πιθανών τιμών $\{21/6, 22/6, 24/6, 27/6, 31/6, 36/6\}$ με αντίστοιχες πιθανότητες όλες ίσες με $1/6$. Άρα $\mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X)) = 161/36$.
(iv) $\mathbb{E}(X+Y) = 287/36$, $\mathrm{Var}(X+Y) = 3131/1296$, $\mathrm{Cov}(X,Y) = 89/72$.

5. (i) $c = 18$.
(ii) $f_X(x) = \frac{x}{6}$ για $x = 1, 2, 3$ και $f_Y(y) = \frac{y}{6}$ για $y = 1, 2, 3$.
(iii) $f_{X|Y}(x|y) = \frac{x+y-2}{3y}$. Η τ.μ. $\mathbb{E}(X|Y)$ έχει τιμές $\mathbb{E}(X|Y=y) = \frac{6y+2}{3y}$ με αντίστοιχες πιθανότητες $f_Y(y) = \frac{y}{6}$ για $y = 1, 2, 3$. Άρα $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y)) = 7/3$.
(iv) $\mathbb{E}(X+Y) = 14/3$, $\mathrm{Var}(X+Y) = 8/9$, $\mathrm{Cov}(X,Y) = -1/9$.

6. Poisson με παράμετρο λp.