Θεωρία Πιθανοτήτων, εαρινό εξάμηνο 2017-18.

Ένατο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Έστω ότι η συνάρτηση πυκνότητας μιας διδιάστατης συνεχούς τυχαίας μεταβλητής (X, Y) έχει τύπο $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} k, & \text{αν } (x,y) \in [a,b] \times [c,d] \\ 0, & \text{αν } (x,y) \notin [a,b] \times [c,d] \end{cases}$ όπου $k > 0$ είναι μια σταθερά.
(i) Να βρεθεί η τιμή της k.
(ii) Αν $A \subseteq \mathbb{R}^2$, ποιά είναι η πιθανότητα $P((X,Y) \in A)$;
(iii) Ποιοί είναι οι τύποι των f_X, f_Y;
(iv) Είναι οι X, Y ανεξάρτητες; Βρείτε τις $\mathbb{E}(X+Y)$, Var$(X+Y)$, Cov(X,Y).

2. Έστω ότι η συνάρτηση πυκνότητας μιας διδιάστατης συνεχούς τυχαίας μεταβλητής (X, Y) έχει τύπο $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} k, & \text{αν } 0 \leq y \leq 1-x \leq 1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$ όπου $k > 0$ είναι μια σταθερά.
(i) Να βρεθεί η τιμή της k.
(ii) Αν $A \subseteq \mathbb{R}^2$, ποιά είναι η πιθανότητα $P((X,Y) \in A)$;
(iii) Ποιοί είναι οι τύποι των f_X, f_Y;
(iv) Είναι οι X, Y ανεξάρτητες; Βρείτε τις $\mathbb{E}(X+Y)$, Var$(X+Y)$, Cov(X,Y).

3. Έστω ότι η συνάρτηση πυκνότητας μιας διδιάστατης συνεχούς τυχαίας μεταβλητής (X, Y) έχει τύπο $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \lambda x e^{-x(\lambda+y)}, & \text{αν } x,y > 0 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$ όπου $\lambda > 0$ είναι μια σταθερά.
(i) Ποιοί είναι οι τύποι των f_X, f_Y;
(ii) Είναι οι X, Y ανεξάρτητες; Τί μπορείτε να πείτε για τις $\mathbb{E}(X+Y)$, Var$(X+Y)$, Cov(X,Y);

1. (i) $k = 1/(b-a)(d-c)$.
(ii) Αν $R = [a,b] \times [c,d]$, τότε $P((X,Y) \in A) = \text{εμβ}(A \cap R)/\text{εμβ}(R)$.
(iii) $f_X(x) = \begin{cases} 1/(b-a), & \text{αν } x \in [a,b] \\ 0, & \text{αν } x \notin [a,b] \end{cases}$ $f_Y(y) = \begin{cases} 1/(d-c), & \text{αν } y \in [c,d] \\ 0, & \text{αν } y \notin [c,d] \end{cases}$
(iv) Ναι. $\mathbb{E}(X+Y) = (a+b+c+d)/2$, $\text{Var}(X+Y) = ((b-a)^2 + (d-c)^2)/12$, $\text{Cov}(X,Y) = 0$.

2. (i) $k = 2$.
(ii) Αν $R = \{(x,y) \,|\, 0 \le y \le 1-x \le 1\}$, τότε $P((X,Y) \in A) = \text{εμβ}(A \cap R)/\text{εμβ}(R)$.
(iii) $f_X(x) = \begin{cases} 2(1-x), & \text{αν } x \in [0,1] \\ 0, & \text{αν } x \notin [0,1] \end{cases}$ $f_Y(y) = \begin{cases} 2(1-y), & \text{αν } y \in [0,1] \\ 0, & \text{αν } y \notin [0,1] \end{cases}$
(iv) Όχι. $\mathbb{E}(X+Y) = 2/3$, $\text{Var}(X+Y) = 1/18$, $\text{Cov}(X,Y) = -1/36$.

3. (i) $f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{αν } x > 0 \\ 0, & \text{αν } x \le 0 \end{cases}$ $f_Y(y) = \begin{cases} \lambda/(\lambda+y)^2, & \text{αν } y > 0 \\ 0, & \text{αν } y \le 0 \end{cases}$
(ii) Όχι. Δεν υπάρχουν.