

**Θεωρία Πιθανοτήτων, εαρινό εξάμηνο 2017-18.**

**Πρώτη πρόοδος, 28.03.2018.**

- (i) Αν  $P(A) = 1/3$ ,  $P(B) = 1/4$ , βρείτε την ελάχιστη δυνατή και την μέγιστη δυνατή τιμή της  $P(A \cup B)$ . Σε ποιές περιπτώσεις “πιάνονται” αυτές οι τιμές;  
(ii) Αν  $P(A) > 0$ ,  $P(B) > 0$  και  $P(A|B) = P(A)$ , αποδείξτε ότι  $P(B|A) = P(B)$ .
- Αν  $P(X = -1) = 1/4$ ,  $P(X = 0) = 1/2$  και  $P(X = 1) = 1/4$ , σχεδιάστε την συνάρτηση κατανομής  $F_X$  και βρείτε την  $\mathbb{E}(X)$  και την  $\text{Var}(X)$ .
- Δύο άνθρωποι επιλέγουν, ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλον, έναν αριθμό τυχαία και ομοιόμορφα στο διάστημα  $[0, 1]$ . Ποιά είναι η πιθανότητα ένας από τους δύο αριθμούς να είναι μεγαλύτερος από το τριπλάσιο του άλλου;
- Ένα δοχείο περιέχει  $n$  βόλους αριθμημένους από το 1 έως το  $n$ . Επιλέγουμε τυχαία έναν βόλο και, κατόπιν, χωρίς να επανατοποθετήσουμε τον βόλο στο δοχείο, επιλέγουμε πάλι τυχαία έναν βόλο. Αν  $X$  είναι ο μεγαλύτερος από τους αριθμούς των δύο βόλων που επιλέξαμε, βρείτε την συνάρτηση κατανομής  $F_X$  της τ.μ.  $X$ .
- Το δοχείο A περιέχει οκτώ άσπρες και δύο μαύρες μπάλες, ενώ το δοχείο B περιέχει τέσσερις άσπρες και έξι μαύρες μπάλες. Κάποιος επιλέγει το δοχείο A με πιθανότητα 0,4 και το δοχείο B με πιθανότητα 0,6. Βγάζουμε από το επιλεγμένο δοχείο (χωρίς να γνωρίζουμε αν είναι το A ή το B) στην τύχη μία άσπρη μπάλα. Βρείτε την πιθανότητα το δοχείο να είναι το A.
- Μία εταιρεία αστικών συγκοινωνιών με στόλο εκατό λεωφορείων αποσύρει καθημερινά λόγω βλάβης κατά μέσο όρο ένα λεωφορείο. Αν κάθε λεωφορείο που παρουσιάζει βλάβη απαιτεί εργασία μίας ημέρας ενός μηχανικού για την επισκευή του, να βρείτε, προσεγγίζοντας με κατάλληλη κατανομή Poisson, πόσους μηχανικούς πρέπει να προσλάβει η εταιρεία ώστε με πιθανότητα τουλάχιστον 0,95 να υπάρχουν διαθέσιμοι μηχανικοί για τα λεωφορεία που παρουσιάζουν βλάβη. (Προσεγγίστε το  $e$  με 2,72.)
- Έστω ακολουθία ανεξάρτητων δοκιμών Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας  $p$  και αποτυχίας  $1 - p$ . Για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  θεωρούμε  $X_n$  να είναι το πλήθος των αποτυχιών μέχρι την  $n$  επιτυχία. Γνωρίζουμε ότι η τ.μ.  $X_1$  ακολουθεί την γεωμετρική κατανομή με παράμετρο  $p$ . Ποιά κατανομή ακολουθεί η τ.μ.  $X_{n+1} - X_n$ ;

Διάρκεια της εξέτασης: μία ώρα και τριάντα λεπτά. Ελάχιστη ώρα παραμονής: μία ώρα.