

Θεωρία Πιθανοτήτων, εαρινό εξάμηνο 2017-18.

Τελικό διαγώνισμα, 30.05.2018.

1. Αν $P(A) = 2/3$, $P(B) = 1/2$, βρείτε την ελάχιστη δυνατή και την μέγιστη δυνατή τιμή της $P(A \cap B)$. Σε ποιές περιπτώσεις “πιάνονται” αυτές οι τιμές;
2. Αν $P(X \leq 0) = P(X \geq 0) = 1$, σχεδιάστε την συνάρτηση κατανομής F_X και βρείτε την $\mathbb{E}(X)$ και την $\text{Var}(X)$.
3. Ένας παίκτης ρίχνει διαδοχικά ένα νόμισμα το οποίο δείχνει Κ με πιθανότητα $\frac{2}{3}$. Ο παίκτης σταματά την πρώτη φορά που το νόμισμα θα δείξει Κ: αν αυτό συμβεί στην n ρίψη ο παίκτης κερδίζει a^{n-1} ευρώ, όπου $0 < a < 1$. Βρείτε την τιμή του a ώστε το αναμενόμενο κέρδος του παίκτη να είναι $\frac{4}{5}$.
4. Ένα δοχείο περιέχει n βόλους αριθμημένους από 1 έως n . Επιλέγουμε τυχαία έναν βόλο και, κατόπιν, χωρίς να επανατοποθετήσουμε τον βόλο στο δοχείο, επιλέγουμε πάλι τυχαία έναν βόλο. Αν X, Y είναι οι αριθμοί των δύο βόλων, αποδείξτε ότι $P(X < Y) = P(X > Y)$.
5. Σε μια αεροπορική πτήση με αεροπλάνο ενενήντα θέσεων δεν εμφανίζονται κατά την αναχώρηση κατά μέσο όρο δύο από όσους έχουν κάνει κράτηση. Ποιά είναι η πιθανότητα να ταξιδέψει κάποιος που βρίσκεται στην τέταρτη θέση του καταλόγου αναμονής; (Φυσικά, χρησιμοποιήστε την κατανομή Poisson.)
6. Έστω ότι η (X, Y) ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο τρίγωνο το οποίο έχει κορυφές τα σημεία $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$. Βρείτε την $P(X \leq Y)$, καθώς και τις $f_X(x)$, $f_Y(y)$. Είναι οι X, Y ανεξάρτητες;
7. Έστω ότι η (X, Y) ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στον δίσκο $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. Βρείτε την μέση τιμή της απόστασης του (X, Y) από το κέντρο του δίσκου.
8. Οι X, Y ακολουθούν η καθεμία την κανονική κατανομή $\mathcal{N}(0, 1)$ και είναι ανεξάρτητες. Ποιά κατανομή ακολουθεί η (X, Y) ; Αποδείξτε ότι η $(X + Y, Y)$ ακολουθεί κανονική κατανομή και βρείτε τον πίνακα συνδιακυμάνσεων της $(X + Y, Y)$; Είναι οι $X + Y, Y$ ανεξάρτητες;
9. Έστω σταθερά c και έστω ότι η X έχει συνάρτηση πυκνότητας $f_X(x) = ce^{-3x}$ για $x \geq 0$ και $f_X(x) = 0$ για $x < 0$. Βρείτε την c . Βρείτε την ροπογεννήτρια $M_X(t)$ της X και βάσει αυτής βρείτε τις $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(X^2)$. Αν οι X_1, X_2 έχουν την ίδια κατανομή με την X και είναι ανεξάρτητες, βρείτε την ροπογεννήτρια $M_{X_1+X_2}(t)$ της $X_1 + X_2$.

Διάρκεια της εξέτασης: δύο ώρες και ένα τέταρτο.

Τα θέματα δεύτερης προόδου είναι τα 6, 7, 8 και 9. Όσοι γράφουν μόνο τα θέματα της δεύτερης προόδου, να το γράψουν στην κόλλα τους και να αποχωρήσουν σε μία ώρα και δέκα λεπτά.