

Θεωρία Πιθανοτήτων, εαρινό εξάμηνο 2017-18.

Διαγώνισμα περιόδου Σεπτεμβρίου, 03.09.2018.

1. Το δοχείο A περιέχει 10 άσπρα και 90 μαύρα σφαιρίδια και το δοχείο B περιέχει 20 άσπρα και 80 μαύρα σφαιρίδια. Κάποιος επιλέγει το δοχείο A με πιθανότητα 0.6 και το δοχείο B με πιθανότητα 0.4. Από το δοχείο το οποίο επέλεξε (εμείς δεν γνωρίζουμε ποιό είναι) επιλέγει τυχαία εννέα σφαιρίδια και από αυτά ένα είναι άσπρο. Ποιά είναι η πιθανότητα το δοχείο να είναι το A;
2. Ένα δοχείο περιέχει N βόλους αριθμημένους από 1 έως N . Επιλέγουμε τυχαία m βόλους από το δοχείο και ονομάζουμε X τον μέγιστο αριθμό βόλου από τους m που επιλέγουμε. Βρείτε την πιθανότητα $P(X \leq n)$ για κάθε $n = 1, \dots, N$ όταν η επιλογή των βόλων γίνεται (α) με επανατοποθέτηση και (β) χωρίς επανατοποθέτηση.
3. Η συνεχής τ.μ. X ακολουθεί κατανομή με $f_X(x) = ce^{-\lambda x}$ για $x \geq 0$ και $f_X(x) = 0$ για $x < 0$. Βρείτε την σταθερά c συναρτήσει της παραμέτρου $\lambda > 0$ και αποδείξτε ότι $P(X \geq x + y | X \geq x) = P(X \geq y)$ για κάθε $x, y \geq 0$.
4. Έστω ότι η (X, Y) ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο τρίγωνο το οποίο έχει κορυφές τα σημεία $(0, 0), (1, 0), (0, 1)$. Βρείτε τις $f_{X,Y}(x, y), f_X(x), f_Y(y)$. Είναι οι X, Y ανεξάρτητες; Βρείτε τις $\mathbb{E}(X + Y), \text{Cov}(X, Y), \text{Var}(X + Y)$.
5. Οι ανεξάρτητες τ.μ. X, Y ακολουθούν η καθεμία την κανονική κατανομή $\mathcal{N}(0, 1)$. Ποιά κατανομή ακολουθεί η (X, Y) και ποιός είναι ο πίνακας συνδιακυμάνσεων της (X, Y) ; Ποιά κατανομή ακολουθεί η $(X, X - Y)$ και ποιός είναι ο πίνακας συνδιακυμάνσεών της; Είναι οι $X, X - Y$ ανεξάρτητες;

Διάρκεια της εξέτασης: δύο ώρες. Ελάχιστη παραμονή: μία ώρα.