Θεωρία Πιθανοτήτων, εαρινό εξάμηνο 2017-18.

Φυλλάδιο ασκήσεων επανάληψης.

1. Αν $P(A) = 1/3$ και $P(A \cup B) = 3/4$, βρείτε την ελάχιστη δυνατή και την μέγιστη δυνατή τιμή της $P(B)$.

2. Αν τα ενδεχόμενα A, B είναι ανεξάρτητα, αποδείξτε ότι τα A^c, B καθώς και τα A^c, B^c είναι ανεξάρτητα.

3. Έστω F_X η συνάρτηση κατανομής μιας τυχαίας μεταβλητής X. Εκφράστε τις πιθανότητες $P(X > a)$, $P(X = a)$ και $P(X < a)$ χρησιμοποιώντας την F_X.

4. Ρίχνουμε ένα αμερόληπτο νόμισμα δύο φορές. Αν A_k είναι το ενδεχόμενο να προκύψει k φορές K, όπου $k = 0, 1, 2$, βρείτε την πιθανότητα $P(A_k)$.

5. Ρίχνουμε ένα αμερόληπτο ζάρι δύο φορές. Αν A_k είναι το ενδεχόμενο να προκύψει άθροισμα ενδείξεων k, όπου $k = 2, 3, \ldots, 11, 12$, βρείτε την πιθανότητα $P(A_k)$.

6. Επιλέγουμε τυχαία δύο αριθμούς x, y στο διάστημα $[0, 1]$. Οι δύο αριθμοί χωρίζουν το $[0, 1]$ σε τρία υποδιαστήματα. Βρείτε την πιθανότητα τα τρία υποδιαστήματα να αποτελούν πλευρές τριγώνου.

7. Δύο ισοδύναμοι παίκτες, ο A και ο B, παίζουν ένα παιχνίδι. Αυτός που θα νικήσει πρώτος σε πέντε παιχνίδια θα πάρει 64 χρυσά νομίσματα. Η διαδικασία σταματά λόγω ανωτέρας βίας, όταν ο A έχει κερδίσει τρία παιχνίδια και ο B έχει κερδίσει δύο παιχνίδια. Πώς πρέπει να μοιραστούν τα 64 νομίσματα στους δύο παίκτες;

8. Ένας χρόνος έχει 365 ημέρες και όλες οι ημέρες είναι εξίσου πιθανές ως ημέρες γεννήσεων. Ποιά είναι η πιθανότητα δύο τουλάχιστον από k συγκεκριμένα άτομα να έχουν γενέθλια την ίδια ημέρα;

9. Ένα δοχείο περιέχει n βώλους αριθμημένους από το 1 έως το n. Επιλέγουμε διαδοχικά και χωρίς επανατοποθέτηση τρεις βώλους. Ποιά είναι η πιθανότητα ο αριθμός του πρώτου βώλου να είναι μικρότερος από τον αριθμό του δεύτερου βώλου; Ποιά είναι η πιθανότητα ο αριθμός του πρώτου βώλου να είναι ο μικρότερος και ο αριθμός του τρίτου βώλου να είναι ο μεγαλύτερος από τους τρείς;

10. Ρίχνουμε τρία αμερόληπτα ζάρια. Ποιά είναι η πιθανότητα το άθροισμα των τριών ενδείξεων να είναι μεγαλύτερο από 10;

11. Ένα δοχείο περιέχει k άσπρους βώλους και $n - k$ μαύρους βώλους. Επιλέγουμε διαδοχικά και τυχαία έναν βώλο. Κάθε φορά που βρίσκουμε άσπρο βώλο τον ξανατοποθετούμε στο δοχείο ενώ κάθε φορά που βρίσκουμε μαύρο βώλο τοποθετούμε στο δοχείο, αντί αυτού, έναν άσπρο βώλο. Ποιά είναι η πιθανότητα να βρούμε άσπρο βώλο στην τρίτη επιλογή μας.

12. Έστω ότι το ποσοστό των γυναικών μιας γεωγραφικής περιοχής που πάσχουν από καρκίνο της μήτρας είναι $0,001$. Το τεστ Παπανικολάου κάνει ορθή διάγνωση της ασθένειας με πιθανότητα $0,97$. Αν το τεστ για μια γυναίκα είναι θετικό, ποιά είναι η πιθανότητα η γυναίκα να πάσχει από καρκίνο της μήτρας;

13. Ένας πομπός εκπέμπει σήματα 0 και 1 με αναλογία ένα προς δύο. Ο δέκτης A λαμβάνει λανθασμένο σήμα στο 2% των περιπτώσεων ενώ ο δέκτης B λαμβάνει λανθασμένο σήμα στο 3% των περιπτώσεων. Αν ο A λάβει σήμα 0 και ο B λάβει σήμα 1, ποιόν από τους δύο πρέπει να εμπιστευτούμε;

14. Ο παίκτης Α ρίχνει αμερόληπτο νόμισμα n φορές. Αν ο Α φέρει k φορές Κ, όπου $k = 0, 1, \ldots, n$, τότε ο παίκτης Β ρίχνει το ίδιο νόμισμα k φορές. Βρείτε (i) την πιθανότητα ο Β να φέρει m φορές Κ, όπου $m = 0, 1, \ldots, n$, (ii) την πιθανότητα ο Α να είχε φέρει k φορές Κ δεδομένου ότι ο Β έφερε m φορές Κ, όπου $k = m, \ldots, n$.
Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τον τύπο $\binom{k}{m}\binom{n}{k} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}$, αφού τον αποδείξετε.

15. Η τυχαία μεταβλητή X έχει συνάρτηση κατανομής με τύπο

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0 \\ 1/4, & 0 \le x < 1 \\ 1/2, & 1 \le x < 3 \\ 3/4, & 3 \le x < 5 \\ 1, & 5 \le x < +\infty \end{cases}$$

Είναι η X διακριτή; Αν ναι, ποιές είναι οι πιθανές τιμές της, ποιά είναι η συνάρτηση πιθανότητας f_X και ποιές είναι οι τιμές των $\mathbb{E}(X)$, $\mathrm{Var}(X)$;

16. Επιλέγουμε τυχαία ένα σημείο στο διάστημα $[0, 4]$. Τα διάφορα ενδεχόμενα είναι υποσύνολα A του $[0, 4]$ με πιθανότητα $P(A) = |A|/4$, όπου $|A|$ είναι το μήκος του A. Θεωρούμε ως τυχαία μεταβλητή X την θέση του σημείου που επιλέγουμε. Σχεδιάστε την γραφική παράσταση της συνάρτησης κατανομής F_X. Είναι η X συνεχής; Αν ναι, ποιά είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας f_X και ποιά είναι η τιμή της $\mathbb{E}(X)$;

17. Ένας παίκτης ρίχνει διαδοχικά ένα νόμισμα το οποίο δείχνει Κ με πιθανότητα p και Γ με πιθανότητα $1 - p$. Ο παίκτης σταματά την πρώτη φορά που το νόμισμα θα δείξει Κ: αν αυτό συμβεί στην n ρίψη ο παίκτης κερδίζει x_n ευρώ. Βρείτε το αναμενόμενο κέρδος του παίκτη στις εξής περιπτώσεις: (i) $x_n = n$ για κάθε $n = 1, 2, 3, \ldots$. (ii) $x_n = a^{n-1}$ για κάθε $n = 1, 2, 3, \ldots$, όπου $0 < a < 1/(p - 1)$.

18. Έστω ότι σε δέκα ρίψεις ενός μη αμερόληπτου νομίσματος η πιθανότητα να εμφανιστεί πέντε φορές Κ είναι διπλάσια της πιθανότητας να εμφανιστεί τέσσερις φορές Κ. Βρείτε την πιθανότητα να εμφανιστεί μία τουλάχιστον φορά Κ σε πέντε ρίψεις του νομίσματος.

19. Μια μηχανή παράγει βίδες από τις οποίες είναι ελαττωματικές κατά μέσο όρο το $0,01\%$. Να υπολογισθεί η πιθανότητα σε ένα κιβώτιο εκατό βιδών να υπάρχει το πολύ μία ελαττωματική με δύο τρόπους: (i) να βρεθεί η ακριβής τιμή της πιθανότητας, (ii) προσεγγίζοντας με την κατανομή Poisson.

20. Σε μια αεροπορική πτήση με αεροπλάνο ογδόντα θέσεων δεν εμφανίζονται κατά την αναχώρηση κατά μέσο όρο τέσσερις από όσους έχουν κάνει κράτηση. Ποιά είναι η πιθανότητα να ταξιδέψει κάποιος που βρίσκεται στην πέμπτη θέση του καταλόγου αναμονής;

21. Σε ένα εργοστάσιο κατά μέσο όρο τρεις από τις εκατό μηχανές του παρουσιάζουν βλάβη σε μία ημέρα. Κάθε μηχανή που παρουσιάζει βλάβη απαιτεί εργασία μίας ημέρας ενός μηχανικού για την επισκευή της. Πόσους μηχανικούς πρέπει να προσλάβει το εργοστάσιο ώστε με πιθανότητα τουλάχιστον $0,95$ να υπάρχει διαθέσιμος μηχανικός όταν μια μηχανή παρουσιάσει βλάβη;

1. $5/12, 3/4$.

3. $1 - F_X(a)$, $F_X(a) - F_X(a-)$, $F_X(a-)$.

4. $P(A_0) = P(A_2) = 1/4$, $P(A_1) = 1/2$.

5. $P(A_k) = (k-1)/36$ αν $2 \le k \le 7$ και $P(A_k) = (13-k)/36$ αν $8 \le k \le 12$.

6. $1/4$.

7. 44 ο Α και 20 ο Β.

8. $1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdots (365-k+1)}{365^k}$.

9. $1/2, 1/6$.

10. $1/2$.

11. $(kn^2 + 2n^2 - 2kn - n + k)/n^3$.

12. $97/3094$.

13. Τον Β.

14. (i) $\binom{n}{m} 3^{n-m}/4^n$. (ii) $\binom{n-m}{k-m} 2^{n-k}/3^{n-m}$.

15. Είναι διακριτή με πιθανές τιμές $0, 1, 3, 5$. $f_X(0) = f_X(1) = f_X(3) = f_X(5) = 1/4$. $\mathbb{E}(X) = 9/4$. $\mathrm{Var}(X) = 59/16$.

16. Είναι συνεχής.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x \le 0 \\ x/4, & 0 \le x \le 4 \\ 1, & 4 \le x < +\infty \end{cases}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0 \\ 1/4, & 0 < x < 4 \\ 0, & 4 < x < +\infty \end{cases}$$

$\mathbb{E}(X) = 2$.

17. (i) $\mathbb{E}(X) = 1/p$. (ii) $\mathbb{E}(X) = p/(1 - a + ap)$.

18. $1 - (5/8)^5$.

19. (i) $(99/100)^{99} + (99/100)^{100} \approx 0,7357$. (ii) $2/e \approx 0,7358$.

20. $1 - e^{-4}(1 + \frac{4}{1!} + \frac{4^2}{2!} + \frac{4^3}{3!} + \frac{4^4}{4!}) \approx 0,3711$.

21. Ο ελάχιστος m έτσι ώστε $e^{-3}(1 + \frac{3}{1!} + \frac{3^2}{2!} + \cdots + \frac{3^m}{m!}) \ge 0,95$. Νομίζω $m = 6$.