Θεωρία Πιθανοτήτων, εαρινό εξάμηνο 2017-18.

Λύσεις του δέκατου φυλλαδίου ασκήσεων.

1. *Η σ.τ.μ. X ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[0,2]$ και η σ.τ.μ. Y ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[2,4]$. Αν οι X, Y είναι ανεξάρτητες, να υπολογίσετε την πιθανότητα η διαφορά $Y - X$ να είναι ≤ 1.*

   Οι f_X, f_Y έχουν τύπους

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/2, & x \in [0,2] \\ 0, & x \notin [0,2] \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} 1/2, & y \in [2,4] \\ 0, & y \notin [2,4] \end{cases}$$

   Επειδή οι X, Y είναι ανεξάρτητες, η $f_{X,Y}$ έχει τύπο

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y) = \begin{cases} 1/4, & (x,y) \in [0,2] \times [2,4] \\ 0, & (x,y) \notin [0,2] \times [2,4] \end{cases}$$

   Άρα

$$\begin{aligned} P(Y - X \leq 1) = P((X,Y) \in A) &= \iint_A f_{X,Y}(x,y)\, dxdy \\ &= \iint_{A \cap R} \frac{1}{4}\, dxdy + \iint_{A \setminus R} 0\, dxdy = \frac{1}{4}\, \text{εμβ}(A \cap R), \end{aligned}$$

   όπου $A = \{(x,y) \,|\, y - x \leq 1\}$ και $R = [0,2] \times [2,4]$. Το A είναι το ημιεπίπεδο που βρίσκεται κάτω από την ευθεία με εξίσωση $y = x + 1$ και η τομή του με το ορθογώνιο $[0,2] \times [2,4]$ είναι ένα τρίγωνο εμβαδού $\frac{1}{2}$. Άρα $P(Y - X \leq 1) = \frac{1}{8}$.

2. *Λέμε ότι η σ.τ.μ. (X,Y) ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο σύνολο $R \subseteq \mathbb{R}^2$ αν η συνάρτηση πυκνότητάς της έχει τύπο*

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} k, & \text{αν } (x,y) \in R \\ 0, & \text{αν } (x,y) \notin R \end{cases}$$

   όπου $k > 0$ είναι μια σταθερά. Είδαμε δύο τέτοια παραδείγματα σε δύο ασκήσεις του ένατου φυλλαδίου: στην μία το R είναι ορθογώνιο και στην άλλη το R είναι τρίγωνο.
   (i) Βρείτε την σταθερά k.
   Στα επόμενα θεωρήστε την ειδική περίπτωση $R = \{(x,y) \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\}$.
   (ii) Ποιά είναι η σταθερά k;
   (iii) Ποιές είναι οι περιθώριες f_X και f_Y; είναι οι X, Y ανεξάρτητες;
   (iv) Βρείτε την f_Z για την σ.τ.μ. $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$. Ποιά είναι η $\mathbb{E}(Z)$;
   (v) Βρείτε την f_W για την σ.τ.μ. $W = X + Y$. Ποιά είναι η $\mathbb{E}(W)$;

   (i) Η σταθερά k προκύπτει από την σχέση

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f_{X,Y}(x,y)\, dxdy = 1.$$

   Έχουμε

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f_{X,Y}(x,y)\, dxdy = \iint_R k\, dxdy + \iint_{R^c} 0\, dxdy = k\, \text{εμβ}(R).$$

   Άρα $k = 1/\text{εμβ}(R)$.
   (ii) $k = 1/\pi$.
   (iii) Έχουμε

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dy.$$

Αν $x \notin [-1,1]$, τότε $(x,y) \notin R$ για κάθε y και άρα $f_{X,Y}(x,y) = 0$ για κάθε y και άρα

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} 0\,dy = 0.$$

Αν $x \in [-1,1]$, τότε: $(x,y) \in R$ αν και μόνο αν $y \in [-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2}]$. Δηλαδή, αν $x \in [-1,1]$, τότε: $f_{X,Y}(x,y) = 1/\pi$ αν $y \in [-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2}]$, και $f_{X,Y}(x,y) = 0$ αν $y \notin [-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2}]$. Άρα, αν $x \in [-1,1]$, τότε

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy = \frac{1}{\pi}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}.$$

Άρα

$$f_X(x) = \begin{cases} (2/\pi)\sqrt{1-x^2}, & x \in [-1,1] \\ 0, & x \notin [-1,1] \end{cases}$$

Ομοίως,

$$f_Y(y) = \begin{cases} (2/\pi)\sqrt{1-y^2}, & y \in [-1,1] \\ 0, & y \notin [-1,1] \end{cases}$$

Για να είναι οι X, Y ανεξάρτητες πρέπει να ισχύει $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$ για κάθε x, y. Έχουμε π.χ. $f_{X,Y}(0,0) = 1/\pi$ και $f_X(0) f_Y(0) = 4/\pi^2$. Άρα οι X, Y δεν είναι ανεξάρτητες.
(iv) Έχουμε

$$F_Z(z) = P(Z \le z) = P(\sqrt{X^2+Y^2} \le z).$$

Αν $z < 0$, είναι προφανές ότι είναι αδύνατο να συμβεί $\sqrt{X^2+Y^2} \le z$, οπότε $F_Z(z) = 0$.
Αν $z \ge 0$, τότε

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(\sqrt{X^2+Y^2} \le z) = P((X,Y) \in A) = \iint_A f_{X,Y}(x,y)\,dxdy \\ &= \iint_{A\cap R} \frac{1}{\pi}\,dxdy + \iint_{A\setminus R} 0\,dxdy = \frac{1}{\pi}\,\text{εμβ}(A\cap R), \end{aligned}$$

όπου $A = \{(x,y) \mid \sqrt{x^2+y^2} \le z\}$ είναι ο δίσκος κέντρου $(0,0)$ και ακτίνας z.
Αν $0 \le z \le 1$, τότε $A \cap R = A$, και αν $z > 1$, τότε $A \cap R = R$. Άρα

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ z^2, & 0 \le z \le 1 \\ 1, & 1 < z \end{cases}$$

Άρα

$$f_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ 2z, & 0 < z < 1 \\ 0, & 1 < z \end{cases}$$

Τέλος,

$$\mathbb{E}(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} z f_Z(z)\,dz = \int_0^1 2z^2\,dz = \frac{2}{3}.$$

(v) Όπως στο (iv).

3. *Οι σ.τ.μ. X, Y ακολουθούν η καθεμία την κανονική κατανομή $\mathcal{N}(0,1)$ και είναι ανεξάρτητες.*
(i) Ποιά κατανομή ακολουθεί η (X,Y);
(ii) Ποιός είναι ο πίνακας συνδιακυμάνσεων της (X,Y);
(iii) Βρείτε την f_Z για την σ.τ.μ. $Z = X^2 + Y^2$.

(iv) Αν $U = X + Y$, $V = X - Y$, ποιά κατανομή ακολουθεί η (U, V);
(v) Ποιός είναι ο πίνακας συνδιακυμάνσεων της (U, V); Είναι οι U, V ανεξάρτητες;

(i) Επειδή οι X, Y είναι ανεξάρτητες,

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-y^2/2} = \frac{1}{2\pi}\, e^{-(x^2+y^2)/2}.$$

Άρα η (X, Y) ακολουθεί κανονική κατανομή.
(ii) Η (X, Y) έχει μέσο $\mu = (0, 0)$ και πίνακα συνδιακυμάνσεων

$$\begin{bmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{X,Y} \\ \sigma_{X,Y} & \sigma_Y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(iii) Έχουμε ότι $F_Z(z) = P(X^2 + Y^2 \leq z)$. Αν $z < 0$, τότε προφανώς $F_Z(z) = 0$. Αν $z \geq 0$, τότε

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(X^2 + Y^2 \leq z) = P((X,Y) \in A) = \iint_A f_{X,Y}(x,y)\, dxdy \\ &= \frac{1}{2\pi} \iint_A e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\, dxdy, \end{aligned}$$

όπου $A = \{(x,y) \,|\, x^2 + y^2 \leq z\}$ είναι ο δίσκος κέντρου $(0,0)$ και ακτίνας $\sqrt{z}$.
Κάνουμε αλλαγή σε πολικές συντεταγμένες και βρίσκουμε

$$F_Z(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Big(\int_0^{\sqrt{z}} e^{-\frac{1}{2}r^2} r\, dr \Big)\, d\theta = \int_0^{\sqrt{z}} e^{-\frac{1}{2}r^2} r\, dr = 1 - e^{-\frac{1}{2}z}.$$

Άρα

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ 1 - e^{-z/2}, & 0 \leq z \end{cases}$$

Άρα

$$f_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ (1/2)e^{-z/2}, & 0 \leq z \end{cases}$$

(iv) Από τις

$$u = u(x,y) = x + y, \quad v = v(x,y) = x - y$$

βρίσκουμε τις

$$x = x(u,v) = \frac{u+v}{2}, \quad y = y(u,v) = \frac{u-v}{2}.$$

Άρα

$$\begin{aligned} f_{U,V}(u,v) &= f_{X,Y}(x(u,v), y(u,v)) \Big| \det \begin{bmatrix} \partial x/\partial u & \partial x/\partial v \\ \partial y/\partial u & \partial y/\partial v \end{bmatrix} \Big| \\ &= \frac{1}{2\pi}\, e^{-(u^2+v^2)/4} \Big| \det \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \Big| = \frac{1}{2\pi\, 2}\, e^{-(u^2+v^2)/4}. \end{aligned}$$

Άρα η (U, V) ακολουθεί κανονική κατανομή.
(v) Η (U, V) έχει μέσο $\mu = (0, 0)$ και πίνακα συνδιακυμάνσεων

$$\begin{bmatrix} \sigma_U^2 & \sigma_{U,V} \\ \sigma_{U,V} & \sigma_V^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Έχουμε

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{U,V}(u,v)\,dv = \frac{1}{2\pi\,2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(u^2+v^2)/4}\,dv$$
$$= \frac{1}{2\pi\,2}\,e^{-u^2/4}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2/4}\,dv = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sqrt{2}}\,e^{-u^2/4}.$$

Ομοίως

$$f_V(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sqrt{2}}\,e^{-v^2/4}.$$

Άρα $f_{U,V}(u,v) = f_U(u)f_V(v)$ για κάθε (u,v) και άρα οι U, V είναι ανεξάρτητες. Οι U, V ακολουθούν και οι δύο την κανονική κατανομή $\mathcal{N}(0,2)$.