Θεωρία Πιθανοτήτων, εαρινό εξάμηνο 2017-18.

Λύσεις του δεύτερου φυλλαδίου ασκήσεων.

1. (i) *Αν* $P(A) = 1/3$, $P(A \cup B) = 1/2$ *και* $P(A \cap B) = 1/4$, *βρείτε την* $P(B)$.
   $P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B) - P(A) = 1/2 + 1/4 - 1/3 = 5/12$.
   (ii) *Αν* $P(A) = P(B) = 3/4$, *βρείτε την ελάχιστη δυνατή και την μέγιστη δυνατή τιμή της* $P(A \cap B)$.
   Επειδή $A \cap B \subseteq A$ και $A \cap B \subseteq B$, συνεπάγεται $P(A \cap B) \leq P(A)$ και $P(A \cap B) \leq P(B)$ Άρα $P(A \cap B) \leq 3/4$. Στην περίπτωση $A = B$ έχουμε $A \cap B = A = B$ και τότε $P(A \cap B) = 3/4$. Άρα όχι μόνο η τιμή $3/4$ είναι άνω φράγμα της $P(A \cap B)$ αλλά η $P(A \cap B)$ μπορεί να πιάσει αυτήν την τιμή. Επομένως, η μέγιστη *δυνατή* τιμή της $P(A \cap B)$ είναι $3/4$.
   Επειδή $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 3/4 + 3/4 - P(A \cup B) = 3/2 - P(A \cup B)$ και επειδή $P(A \cup B) \leq 1$, συνεπάγεται $P(A \cap B) \geq 3/2 - 1 = 1/2$. Δηλαδή η τιμή $1/2$ είναι κάτω φράγμα των τιμών της $P(A \cap B)$. Μπορεί η $P(A \cap B)$ να πιάσει την τιμή $1/2$; Αν πάρουμε ένα υποσύνολο C του A με $P(C) = 1/2$ και θεωρήσουμε το $B = A^c \cup C$, τότε $A^c \cap C = \emptyset$, οπότε $P(B) = P(A^c) + P(C) = (1 - 3/4) + 1/2 = 3/4$ (όπως πρέπει) και $P(A \cap B) = P(C) = 1/2$. Άρα η τιμή $1/2$ μπορεί να πιαστεί από την $P(A \cap B)$ και άρα η ελάχιστη *δυνατή* τιμή της $P(A \cap B)$ είναι $1/2$.

2. *Ρίχνουμε τυχαία* n *βώλους σε* r *δοχεία. Ποιά είναι η πιθανότητα το πρώτο δοχείο να περιέχει ακριβώς* j *βώλους;*
   Επιλέγουμε ένα υποσύνολο των n βώλων που περιέχει j βώλους. Θα βρούμε την πιθανότητα οι j συγκεκριμένοι βώλοι να πέσουν στο πρώτο δοχείο και οι υπόλοιποι $n - j$ να πέσουν σε οποιοδήποτε από τα άλλα $r - 1$ δοχεία. Το να πέσει καθένας βώλος από τους j στο πρώτο δοχείο γίνεται με πιθανότητα $\frac{1}{r}$. Άρα η πιθανότητα να πέσουν και οι j βώλοι στο πρώτο δοχείο είναι $(\frac{1}{r})^j$. Το να πέσει καθένας βώλος από τους $n - j$ σε οποιοδήποτε από τα άλλα $r - 1$ δοχεία γίνεται με πιθανότητα $\frac{r-1}{r}$. Άρα η πιθανότητα να πέσουν και οι $n - j$ βώλοι σε οποιαδήποτε από τα άλλα $r - 1$ δοχεία είναι $(\frac{r-1}{r})^{n-j}$. Άρα η πιθανότητα να πέσουν οι j συγκεκριμένοι βώλοι στο πρώτο δοχείο και όλοι οι υπόλοιποι στα υπόλοιπα δοχεία είναι $(\frac{1}{r})^j (\frac{r-1}{r})^{n-j}$. Αυτή η πιθανότητα αντιστοιχεί σε ένα συγκεκριμένο υποσύνολο των βώλων με j βώλους. Κάθε διαφορετική επιλογή υποσυνόλου με j βώλους αποτελεί ένα διαφορετικό ενδεχόμενο. Άρα η πιθανότητα να μπουν ακριβώς j βώλοι στο πρώτο δοχείο είναι το άθροισμα των πιθανοτήτων των διαφορετικών ενδεχομένων. Επειδή έχουμε $\binom{n}{j}$ διαφορετικά ενδεχόμενα (όσα τα υποσύνολα των n βώλων με j στοιχεία) με την ίδια πιθανότητα $(\frac{1}{r})^j (\frac{r-1}{r})^{n-j}$ το καθένα, η απάντηση είναι $\binom{n}{j} (\frac{1}{r})^j (\frac{r-1}{r})^{n-j} = \binom{n}{j} \frac{(r-1)^{n-j}}{r^n}$.
   Είναι σημαντικό να συνειδητοποιήσουμε ότι καθοριστικό ρόλο στα παραπάνω έπαιξε το εξής: το πού θα πέσουν κάποιοι βώλοι είναι *ανεξάρτητο* από το πού θα πέσουν κάποιοι άλλοι βώλοι. Αυτό μας επέτρεψε να πολλαπλασιάζουμε πιθανότητες.

3. *Ένα δοχείο περιέχει* n *καλές και* m *χαλασμένες λάμπες. Αν επιλέξουμε τυχαία* r $(r \leq n)$ *λάμπες, ποιά είναι η πιθανότητα να είναι όλες καλές;*
   Ονομάζουμε A_1 το ενδεχόμενο από την πρώτη επιλογή λάμπας να προκύψει καλή λάμπα, A_2 το ενδεχόμενο από την δεύτερη επιλογή λάμπας να προκύψει καλή λάμπα κλπ. Η πιθανότητα που μας ενδιαφέρει είναι η $P(A_1 \cap \cdots \cap A_r)$. Γνωρίζουμε ότι
   $$P(A_1 \cap \cdots \cap A_r) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdots P(A_r|A_1 \cap \cdots \cap A_{r-1}).$$
   Η $P(A_k|A_1 \cap A_{k-1})$ είναι η πιθανότητα η k λάμπα να είναι καλή δεδομένου ότι οι πρώτες $k - 1$ λάμπες ήταν όλες καλές. Δηλαδή όταν επιλεγουμε την k λάμπα θα υπάρχουν $n + m - k + 1$ λάμπες από τις οποίες $n - k + 1$ είναι καλές. Άρα $P(A_k|A_1 \cap A_{k-1}) = \frac{n-k+1}{n+m-k+1}$ και επομένως η απάντηση είναι
   $$P(A_1 \cap \cdots \cap A_r) = \frac{n}{n+m} \frac{n-1}{n+m-1} \cdots \frac{n-r+1}{n+m-r+1}.$$

Δεύτερος τρόπος είναι με μέτρημα. Το πλήθος των υποσυνόλων με r λάμπες (χωρίς να μας νοιάζει αν είναι καλές ή χαλασμένες) του συνόλου με τις $n+m$ λάμπες είναι $\binom{n+m}{r}$. Το πλήθος των υποσυνόλων με r *καλές* λάμπες του συνόλου με τις n καλές λάμπες είναι $\binom{n}{r}$. Άρα η πιθανότητα που μας ενδιαφέρει είναι

$$\binom{n}{r} \Big/ \binom{n+m}{r}.$$

Ελέγξτε ότι οι δύο απαντήσεις ταυτίζονται.

4. *Επιλέγουμε τυχαία τέσσερα χαρτιά από μία τράπουλα. Ποιά είναι η πιθανότητα τρία από αυτά να είναι μαύρα και ένα κόκκινο;*
Το να πάρουμε τρία χαρτιά από τα εικοσιέξι μαύρα γίνεται με $\binom{26}{3}$ τρόπους. Για καθέναν από αυτούς τους τρόπους, το να πάρουμε ένα χαρτί από τα εικοσιέξι κόκκινα γίνεται με $\binom{26}{1}$ τρόπους. Άρα το να πάρουμε τρία χαρτιά από τα εικοσιέξι μαύρα και ένα από τα εικοσιέξι κόκκινα γίνεται με $\binom{26}{3}\binom{26}{1}$ τρόπους. Οι συνολικοί τρόποι να επιλέξουμε τέσσερα χαρτιά από τα πενηνταδύο είναι $\binom{52}{4}$. Άρα η πιθανότητα που ζητάμε είναι

$$\binom{26}{3}\binom{26}{1} \Big/ \binom{52}{4}.$$

5. *Ανοίγουμε τυχαία ένα-ένα τα χαρτιά μιας τράπουλας μέχρι να βρούμε πρώτη φορά άσσο. Ποιά είναι η πιθανότητα να συμβεί αυτό στο n-οστό χαρτί;*
Αν $n = 1$, τότε η πιθανότητα να βρούμε πρώτη φορά άσσο στο πρώτο χαρτί είναι $4/52$. Τώρα έστω $n \geq 2$. Ονομάζουμε B το ενδεχόμενο να επιλέξουμε τα πρώτα $n-1$ χαρτιά χωρίς να βρούμε άσσο και A το ενδεχόμενο να βρούμε άσσο στο n-οστό χαρτί. Η πιθανότητα που μας ενδιαφέρει είναι η $P(B \cap A)$. Όμως,

$$P(B \cap A) = P(B)P(A|B).$$

Το να επιλέξουμε $n-1$ χαρτιά από τα πενήντα δύο γίνεται με $\binom{52}{n-1}$ τρόπους. Το να επιλέξουμε $n-1$ χαρτιά και να μην είναι κανένα άσσος, σημαίνει ότι τα επιλέγουμε όλα από τα σαρανταοκτώ που δεν είναι άσσοι, δηλαδή με $\binom{48}{n-1}$ τρόπους. Άρα $P(B) = \binom{48}{n-1}/\binom{52}{n-1}$. Αν είναι δεδομένο ότι τα πρώτα $n-1$ χαρτιά είναι μη-άσσοι, τότε για την επιλογή του n-οστού χαρτιού έχουν απομείνει $52-n+1$ χαρτιά από τα οποία τέσσερα είναι άσσοι. Άρα $P(A|B) = \frac{4}{52-n+1}$. Άρα η απάντηση είναι

$$P(B \cap A) = P(B)P(A|B) = \frac{\binom{48}{n-1}}{\binom{52}{n-1}} \frac{4}{52-n+1}.$$

6. (i) *Ο Τάσος και η Γκόλφω πρόκειται να χορέψουν με άλλα δέκα νέα παιδιά, τσέλιγκες και τσελιγκοπούλες, σε ευθεία γραμμή, τυχαία κατανεμημένοι. Ποιά είναι η πιθανότητα να τους χωρίζουν έξι παιδιά; Ποιά είναι η ίδια πιθανότητα αν χορέψουν σε κύκλο;*
Πρώτα η περίπτωση της ευθείας γραμμής. Υπάρχουν πέντε συγκεκριμένα ζευγάρια θέσεων στα οποία μπορεί να βρεθούν ο Τάσος και η Γκόλφω και να τους χωρίζουν έξι παιδιά. Τώρα, υπάρχουν $\binom{12}{2}$ τρόποι να επιλέξουμε δύο οποιεσδήποτε θέσεις από τις δώδεκα και πέντε τρόποι να επιλέξουμε τις δύο θέσεις που μας ενδιαφέρουν. Άρα η απάντηση είναι

$$5 \Big/ \binom{12}{2} = \frac{10}{132}.$$

Τώρα η περίπτωση του κύκλου. Επειδή μια συγκεκριμένη διάταξη των χορευτών δεν θεωρείται διαφορετική αν οι χορευτές απλώς περιστραφούν γύρω από το κέντρο του κύκλου, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ο Τάσος βρίσκεται σταθεροποιημένος σε μια θέση στον κύκλο και ότι η κατάσταση μπορεί να αλλάξει ανάλογα με το σε ποιά από τις υπόλοιπες έντεκα θέσεις θα βρεθούν οι υπόλοιποι έντεκα χορευτές. Η πιθανότητα που μας ενδιαφέρει είναι του ενδεχομένου να βρεθεί η Γκόλφω σε δύο συγκεκριμένες από τις έντεκα: στην έβδομη μακρυά από τον Τάσο είτε δεξιά του είτε αριστερά του. Άρα η απάντηση είναι

$$2/11.$$

(ii) *Το ίδιο σκηνικό με πριν. Αν επιθυμεί, διακαώς αλλά και κρυφίως, ο φλογερός Τάσος να χορέψει πλάι-πλάι με την χαμηλοβλεπούσα Γκόλφω, τί πρέπει να προτείνει στην παρέα; Να χορέψουν σε ευθεία γραμμή ή σε κύκλο;*
Στην περίπτωση ευθείας γραμμής έχουμε έντεκα ζευγάρια πλαϊνών θέσεων και $\binom{12}{2}$ τρόπους να επιλέξουμε δύο οποιεσδήποτε θέσεις από τις δώδεκα. Άρα η πιθανότητα να βρεθούν πλάι-πλάι ο Τάσος και η Γκόλφω είναι $11/\binom{12}{2} = \frac{1}{6}$. Η πιθανότητα στην περίπτωση του κύκλου είναι, όπως πριν, $2/11$. Άρα ο Τάσος προτείνει κύκλο.

7. *Στον τετράγωνο περίβολο της εκκλησίας με πλευρά είκοσι μέτρων βρίσκονται δέκα ανύπαντρες φίλες της νύφης. Η νύφη ρίχνει τυχαία την ανθοδέσμη μέσα στον περίβολο. Ποιά είναι η ελάχιστη πιθανότητα να μην πιάσει καμία από τις δέκα φίλες την ανθοδέσμη, αν υποθέσουμε ότι καθεμιά από αυτές φτάνει ένα μέτρο μακριά από το σημείο που στέκεται; Πώς πρέπει να ακροβολιστούν οι φίλες ώστε να εξασφαλίσουν τουλάχιστον αυτήν την κακιά(;) πιθανότητα; Παρεμπιπτόντως, ποιά είναι η μέγιστη κακιά(;) πιθανότητα;*
Αν θεωρήσουμε ένα δίσκο με ακτίνα 1 και κέντρο οποιαδήποτε από τις δέκα φίλες, τότε η πιθανότητα να μην πιάσει καμία φίλη την ανθοδέσμη είναι η πιθανότητα να πέσει η ανθοδέσμη στον τετράγωνο περίβολο αλλά έξω από την ένωση των δέκα δίσκων. Αν συμβολίσουμε Ω τον περίβολο και A την ένωση των δέκα δίσκων, τότε η πιθανότητα να μην πιάσει καμία φίλη την ανθοδέσμη είναι ο λόγος εμβαδών:

$$\frac{|\Omega \setminus A|}{|\Omega|}.$$

Για να ελαχιστοποιηθεί αυτή η πιθανότητα πρέπει να μεγαλώσει η ένωση των δέκα δίσκων. Αυτό γίνεται όταν οι δίσκοι είναι ξένοι ανά δύο και βρίσκονται ολόκληροι μέσα στον περίβολο. Αυτή η ελάχιστη πιθανότητα είναι ίση με

$$\frac{20^2 - 10\pi}{20^2} = 1 - \frac{\pi}{40}.$$

Η πιθανότητα μεγιστοποιείται όταν όλες οι φίλες συγκεντρωθούν στην ίδια γωνία του περιβόλου και τότε είναι ίση με

$$\frac{20^2 - \pi/4}{20^2} = 1 - \frac{\pi}{1600}.$$

8. *Σε μια λίμνη ζουν πάρα πολλά ψαράκια. Από την χρονική στιγμή $t = 0$, που η κακιά μοίρα αποφασίζει να χτυπήσει αλύπητα τα ψαράκια, το ποσοστό του πληθυσμού τους που απομένει κάθε χρονική στιγμή t είναι ίσο με $e^{-\lambda t}$, όπου $\lambda > 0$ είναι μια παράμετρος.*
(i) *Ποιά είναι η πιθανότητα να ζήσει για πάντα το αγαπημένο μας ψαράκι, ο Σωτήρης;*
Αν A_t είναι το ενδεχόμενο να ζήσει ο Σωτήρης τουλάχιστον μέχρι την χρονική στιγμή t, τότε η πιθανότητα του ενδεχομένου A_t είναι ίση με την πιθανότητα να βρίσκεται την χρονική στιγμή t ο Σωτήρης ανάμεσα στον πληθυσμό που έχει απομείνει. Δηλαδή $P(A_t) = e^{-\lambda t}$. Αν A_∞ είναι το ενδεχόμενο να ζήσει ο Σωτήρης για πάντα, τότε προφανώς $A_\infty \subseteq A_t$ για κάθε t. Επειδή

$$0 \leq P(A_\infty) \leq P(A_t) = e^{-\lambda t} \to 0 \qquad \text{όταν } t \to +\infty,$$

έχουμε ότι $P(A_\infty) = 0$.
(ii) *Ποιά είναι η πιθανότητα να χαρούμε το δεύτερο αγαπημένο μας ψαράκι, την Πετρούλα, για χρονικό διάστημα τουλάχιστον* 1 *από τότε που θα μας αφήσει ο Σωτήρης;*
Ας υποθέσουμε προς το παρόν ότι δεν μας ενδιαφέρει αν πεθάνει πρώτος ή δεύτερος ο Σωτήρης. Όπως είδαμε, με πιθανότητα 1 κάποια *πεπερασμένη* χρονική στιγμή t_0 θα πεθάνει ένα από τα δύο ψαράκια. Εκείνη την στιγμή το πλήθος $N(t_0)$ των ψαριών που θα έχει απομείνει είναι ίσο με

$$N(t_0) = N(0)e^{-\lambda t_0}$$

όπου $N(0)$ είναι το αρχικό πλήθος των ψαριών την χρονική στιγμή 0. Το πλήθος των ψαριών που θα έχουν απομείνει την χρονική στιγμή $t_0 + 1$ είναι ίσο με

$$N(t_0 + 1) = N(0)e^{-\lambda(t_0+1)}.$$

Άρα το ποσοστό των ψαριών που απομένουν την χρονική στιγμή $t_0 + 1$ σε σχέση με το πλήθος τους την χρονική στιγμή t_0 είναι ίσο με

$$\frac{N(t_0 + 1)}{N(t_0)} = \frac{N(0)e^{-\lambda(t_0+1)}}{N(0)e^{-\lambda t_0}} = e^{-\lambda}.$$

Βλέπουμε ότι η πιθανότητα να ζήσει ένα ψαράκι για χρονικό διάστημα τουλάχιστον 1 μετά από μια οποιαδήποτε χρονική στιγμή t_0 είναι ίση με $e^{-\lambda}$ και είναι ανεξάρτητη της χρονικής στιγμής t_0. Άρα η πιθανότητα να ζήσει το δεύτερο ψαράκι (Σωτήρης ή Πετρούλα) για χρονικό διάστημα τουλάχιστον 1 από τη στιγμή που θα πεθάνει το πρώτο είναι ίση με $e^{-\lambda}$. Επειδή, προφανώς, Σωτήρης-Πετρούλα και Πετρούλα-Σωτήρης είναι ισοδύναμες καταστάσεις, η πιθανότητα να πεθάνει πρώτος ο Σωτήρης και να ζήσει η Πετρούλα για χρονικό διάστημα τουλάχιστον 1 από τη στιγμή που θα πεθάνει ο Σωτήρης είναι ίση με $e^{-\lambda}/2$.