Θεωρία Πιθανοτήτων, εαρινό εξάμηνο 2017-18.

Λύσεις του τέταρτου φυλλαδίου ασκήσεων.

1. *Ρίχνουμε ένα νόμισμα τρεις φορές και θεωρούμε το ενδεχόμενο να προκύψουν και οι δυο όψεις του νομίσματος καθώς και το ενδεχόμενο να προκύψει το πολύ ένα Γ. Είναι τα δύο ενδεχόμενα ανεξάρτητα;*
   Έστω A το ενδεχόμενο να προκύψουν και οι δύο όψεις του νομίσματος. Για να υπολογίσουμε την πιθανότητα $P(A)$ είναι πιο απλό να υπολογίσουμε πρώτα την πιθανότητα του συμπληρωματικού ενδεχομένου. Το A^c είναι το ενδεχόμενο να προκύψει και τις τρεις φορές μόνο η μία όψη, δηλαδή ΚΚΚ ή ΓΓΓ. Η πιθανότητα του ΚΚΚ είναι $\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$. Ίδια είναι η πιθανότητα του ΓΓΓ, οπότε $P(A) = 1 - (\frac{1}{8} + \frac{1}{8}) = \frac{3}{4}$.
   Έστω B το ενδεχόμενο να προκύψει το πολύ ένα Γ. Τότε $B = C \cup D$, όπου C είναι το ενδεχόμενο να μην προκύψει κανένα Γ, δηλαδή ΚΚΚ, και D το ενδεχόμενο να προκύψει ακριβώς ένα Γ, δηλαδή ΓΚΚ ή ΚΓΚ ή ΚΚΓ. Άρα $P(B) = \frac{1}{8} + 3\,\frac{1}{8} = \frac{1}{2}$.
   Το ενδεχόμενο $A \cap B$ είναι το να προκύψει ακριβώς ένα Γ, δηλαδή ΓΚΚ ή ΚΓΚ ή ΚΚΓ. Άρα $P(A \cap B) = 3\,\frac{1}{8} = \frac{3}{8}$.
   Άρα ισχύει $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ και τα A, B είναι ανεξάρτητα.

2. *Λέμε ότι τα ενδεχόμενα A, B είναι ανεξάρτητα με δεδομένο το ενδεχόμενο C αν $P(A \cap B|C) = P(A|C)P(B|C)$.*
   Δέκα βώλοι αριθμημένοι από το 1 έως το 10 βρίσκονται μέσα σε ένα δοχείο. Εξάγουμε διαδοχικά τρεις βώλους από το δοχείο με επανατοποθέτηση (δηλαδή όταν έξάγουμε έναν βώλο τον επανεισάγουμε αμέσως μέσα στο δοχείο). Έστω A το ενδεχόμενο να προκύψει ο βώλος 1 στην δεύτερη εξαγωγή, B το ενδεχόμενο να προκύψει ίδιος βώλος σε ακριβώς δύο από τις τρεις εξαγωγές και C το ενδεχόμενο να προκύψει ο βώλος 1 στην πρώτη εξαγωγή. Είναι τα A, B ανεξάρτητα; Είναι τα A, B ανεξάρτητα, δεδομένου του C;
   Το ενδεχόμενο A έχει πιθανότητα $P(A) = \frac{1}{10}$. Ομοίως, $P(C) = \frac{1}{10}$. Το ενδεχόμενο B είναι η ένωση $B = B_1 \cup B_2 \cup B_3$, όπου B_1 είναι το ενδεχόμενο να προκύψει ένας οποιοσδήποτε βώλος στην πρώτη εξαγωγή και δύο ίδιοι, αλλά διαφορετικοί από τον πρώτο βώλο στις δύο επόμενες εξαγωγές, B_2 είναι το ενδεχόμενο οι ίδιοι βώλοι να είναι ο πρώτος και ο τρίτος και B_3 είναι το ενδεχόμενο οι ίδιοι βώλοι να είναι οι δύο πρώτοι. Τότε $P(B_1) = 1\,\frac{9}{10}\,\frac{1}{10}$ και, ομοίως, $P(B_2) = 1\,\frac{9}{10}\,\frac{1}{10}$ και $P(B_3) = 1\,\frac{1}{10}\,\frac{9}{10}$. Άρα $P(B) = \frac{27}{100}$.
   Το ενδεχόμενο $A \cap B$ είναι η ένωση $A \cap B = D_1 \cup D_2 \cup D_3$, όπου D_1 είναι να προκύψει ο βώλος 1 στις δύο πρώτες εξαγωγές και διαφορετικός βώλος στην τρίτη εξαγωγή, το D_2 είναι το ενδεχόμενο να προκύψει ο βώλος 1 στις δύο τελευταίες εξαγωγές και διαφορετικός βώλος στην πρώτη εξαγωγή και D_3 είναι το ενδεχόμενο να προκύψει ο βώλος 1 στην δεύτερη εξαγωγή και δύο ίδιοι βώλοι διαφορετικοί από τον 1 στις άλλες δύο εξαγωγές. Τότε $P(D_1) = \frac{1}{10}\,\frac{1}{10}\,\frac{9}{10}$ και $P(D_2) = \frac{9}{10}\,\frac{1}{10}\,\frac{1}{10}$ και $P(D_3) = \frac{9}{10}\,\frac{1}{10}\,\frac{1}{10}$. Άρα $P(A \cap B) = \frac{9}{1000} + \frac{9}{1000} + \frac{9}{1000} = \frac{27}{1000}$.
   Άρα ισχύει $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ και τα A, B είναι ανεξάρτητα.
   Με δεδομένο το C, το ενδεχόμενο A έχει $P(A|C) = P(A) = \frac{1}{10}$. (Τα ενδεχόμενα A, C είναι προφανώς ανεξάρτητα.) Με δεδομένο το C το να προκύψει το B σημαίνει ότι στις δύο τελευταίες εξαγωγές έχουμε 1 στην δεύτερη και διαφορετικό αριθμό στην τρίτη ή 1 στην τρίτη και διαφορετικό αριθμό στην δεύτερη ή δύο ίδιους αριθμούς αλλά διαφορετικούς από τον 1. Άρα $P(B|C) = \frac{1}{10}\,\frac{9}{10} + \frac{9}{10}\,\frac{1}{10} + \frac{9}{10}\,\frac{1}{10} = \frac{27}{100}$.
   Με δεδομένο το C, το να προκύψει το ενδεχόμενο $A \cap B$ σημαίνει ότι στην δεύτερη εξαγωγή προκύπτει 1 και στην τρίτη εξαγωγή προκύπτει αριθμός διαφορετικός από 1. Άρα $P(A \cap B|C) = \frac{1}{10}\,\frac{9}{10} = \frac{9}{100}$.
   Τώρα είναι $P(A \cap B|C) \neq P(A|C)P(B|C)$ και άρα τα A, B δεν είναι ανεξάρτητα με δεδομένο το C.

3. *Έστω ότι για μια συγκεκριμένη ασθένεια ο γιατρός κος Πάπαλα συστήνει επικίνδυνη χειρουρ-*

γική επέμβαση αν, μετά από κλινική εξέταση και από εργαστηριακές εξετάσεις, είναι 80% βέβαιος ότι ο ασθενής του πάσχει από αυτήν ενώ, σε αντίθετη περίπτωση, συστήνει περαιτέρω πολυέξοδες εξετάσεις. Οι εργαστηριακές εξετάσεις κάνουν ορθή διάγνωση στο 99% των περιπτώσεων για μη-διαβητικούς και στο 70% των περιπτώσεων για διαβητικούς. Μετά από κλινική εξέταση ο κος Πάπαλα είναι 60% βέβαιος ότι ο κος Μπάμπης πάσχει από την ασθένεια. Γίνονται και οι εργαστηριακές εξετάσεις οι οποίες έχουν θετικό (για την ασθένεια) αποτέλεσμα. Θα χειρουργήσει ο κος Πάπαλα τον κο Μπάμπη, πιστεύοντας ότι ο κος Μπάμπης δεν είναι διαβητικός, ή θα συστήσει κι άλλες εξετάσεις; Τί θα κάνει ο κος Πάπαλα, αν ο κος Μπάμπης μετά τα αποτελέσματα των εξετάσεων θυμηθεί ότι είναι διαβητικός;
Περίπτωση 1: ο κος Μπάμπης δεν είναι διαβητικός. Τότε η πιθανότητα να πάσχει από την ασθένεια είναι $P(\Pi) = \frac{60}{100}$. Η πιθανότητα η εργαστηριακή εξέταση να έχει θετικό αποτέλεσμα με δεδομένο ότι πάσχει ο κος Μπάμπης είναι $P(\Theta|\Pi) = \frac{99}{100}$ και η πιθανότητα θετικού αποτελέσματος με δεδομένο ότι δεν πάσχει ο κος Μπάμπης είναι $P(\Theta|\Delta\Pi) = \frac{1}{100}$. Άρα η πιθανότητα να πάσχει ο κος Μπάμπης με δεδομένο το θετικό αποτέλεσμα είναι

$$\begin{aligned} P(\Pi|\Theta) &= \frac{P(\Theta|\Pi)P(\Pi)}{P(\Theta|\Pi)P(\Pi) + P(\Theta|\Delta\Pi)P(\Delta\Pi)} = \frac{\frac{99}{100}\frac{60}{100}}{\frac{99}{100}\frac{60}{100} + \frac{1}{100}\frac{40}{100}} \\ &= \frac{99 \cdot 60}{99 \cdot 60 + 1 \cdot 40} \approx 0,993311037 > 0,8 \end{aligned}$$

και άρα πάει για εγχείρηση.
Περίπτωση 2: ο κος Μπάμπης είναι διαβητικός. Το μόνο που αλλάζει από τα προηγούμενα είναι οι δεσμευμένες πιθανότητες: $P(\Theta|\Pi) = \frac{70}{100}$ και $P(\Theta|\Delta\Pi) = \frac{30}{100}$. Άρα

$$\begin{aligned} P(\Pi|\Theta) &= \frac{P(\Theta|\Pi)P(\Pi)}{P(\Theta|\Pi)P(\Pi) + P(\Theta|\Delta\Pi)P(\Delta\Pi)} = \frac{\frac{70}{100}\frac{60}{100}}{\frac{70}{100}\frac{60}{100} + \frac{30}{100}\frac{40}{100}} \\ &= \frac{70 \cdot 60}{70 \cdot 60 + 30 \cdot 40} \approx 0,777777778 < 0,8 \end{aligned}$$

και άρα ο κος Μπάμπης δεν πάει για εγχείρηση.

4. *Έστω $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ η συνάρτηση κατανομής μιας τυχαίας μεταβλητής X. Αποδείξτε ότι:*
(i) $P(a < X < b) = F_X(b-) - F_X(a) = F_X(b) - F_X(a) - P(x = b)$ όταν $a < b$.
(ii) $P(a \le X \le b) = F_X(b) - F_X(a-) = F_X(b) - F_X(a) + P(x = a)$ όταν $a < b$.
(iii) $P(a \le X < b) = F_X(b-) - F_X(a-) = F_X(b) - F_X(a) - P(x = b) + P(X = a)$ όταν $a < b$.
(iv) $F_X(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$ και $F_X(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$.
(i)

$$\begin{aligned} P(a < X < b) &= P(a < X \le b) - P(X = b) \\ &= P(X \le b) - P(X \le a) - P(X = b) \\ &= F_X(b) - F_X(a) - P(X = b). \end{aligned}$$

Επειδή $F_X(b) - P(X = b) = F_X(b-)$, έχουμε και

$$P(a < X < b) = F_X(b) - F_X(a) - P(X = b) = F_X(b-) - F_X(a).$$

Οι αποδείξεις των (ii), (iii) είναι παρόμοιες.
(iv) Η συνάρτηση F_X είναι αύξουσα. Άρα αν πάρουμε οποιαδήποτε φθίνουσα ακολουθία (x_n) με όριο $-\infty$, τότε $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = \lim_{n\to+\infty} F_X(x_n)$. Τώρα σκεφτόμαστε ότι τα ενδεχόμενα $X \le x_n$ μικραίνουν (επειδή η (x_n) είναι φθίνουσα) και η τομή τους είναι το $\emptyset$ (επειδή $x_n \to -\infty$). Άρα

$$\lim_{n\to+\infty} F_X(x_n) = \lim_{n\to+\infty} P(X \le x_n) = P(\emptyset) = 0.$$

[Θα γίνω λίγο πιο αναλυτικός. Το ενδεχόμενο $X \leq x_n$ είναι, αναλυτικά γραμμένο, το εξής υποσύνολο του δειγματικού χώρου Ω:

$$\{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \leq x_n\}.$$

Αν για κάποιο ω ισχύει $X(\omega) \leq x_{n+1}$, τότε, επειδή $x_{n+1} \leq x_n$, συνεπάγεται ότι ισχύει $X(\omega) \leq x_n$. Άρα

$$\{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \leq x_{n+1}\} \subseteq \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \leq x_n\}.$$

Η τομή αυτών των ενδεχομένων για κάθε n είναι το κενό υποσύνολο του Ω:

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \leq x_n\} = \emptyset.$$

Πράγματι, ένα ω ανήκει στην τομή αν ανήκει σε κάθε σύνολο, δηλαδή αν ισχύει $X(\omega) \leq x_n$ για κάθε n. Αν ισχύει κάτι τέτοιο, τότε, παίρνοντας όριο καθώς $n \to +\infty$, βρίσκουμε $X(\omega) = -\infty$. Αυτό είναι αδύνατον επειδή $X(\omega) \in \mathbb{R}$. Άρα δεν υπάρχει κανένα ω στην τομή και άρα η τομή είναι κενή.
Γνωρίζουμε, γενικά, ότι αν τα ενδεχόμενα A_n μικραίνουν, δηλαδή αν $A_{n+1} \subseteq A_n$, και αν $\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n = A$, τότε $\lim_{n\to+\infty} P(A_n) = P(A)$. Άρα στην περίπτωσή μας έχουμε

$$\lim_{n\to+\infty} P(\{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \leq x_n\}) = P(\emptyset) = 0.$$

Ισοδύναμα: $\lim_{n\to+\infty} P(X \leq x_n) = 0$.]
Επειδή η F_X είναι αύξουσα, αν πάρουμε οποιαδήποτε αύξουσα ακολουθία (x_n) με όριο $+\infty$, τότε $\lim_{x\to+\infty} F_X(x) = \lim_{n\to+\infty} F_X(x_n)$. Τώρα τα ενδεχόμενα $X \leq x_n$ μεγαλώνουν (επειδή η (x_n) είναι αύξουσα) και η ένωσή τους είναι το $\mathbb{R}$ (επειδή $x_n \to +\infty$). Άρα

$$\lim_{n\to+\infty} F_X(x_n) = \lim_{n\to+\infty} P(X \leq x_n) = P(\mathbb{R}) = 1.$$

[Θα ξαναγίνω πιο αναλυτικός. Πάλι το ενδεχόμενο $X \leq x_n$ είναι, αναλυτικά γραμμένο:

$$\{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \leq x_n\}.$$

Αν για κάποιο ω ισχύει $X(\omega) \leq x_n$, τότε, επειδή $x_n \leq x_{n+1}$, συνεπάγεται ότι ισχύει $X(\omega) \leq x_{n+1}$. Άρα

$$\{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \leq x_n\} \subseteq \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \leq x_{n+1}\}.$$

Η ένωση αυτών των ενδεχομένων για κάθε n είναι ολόκληρο το Ω:

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \leq x_n\} = \Omega.$$

Πράγματι, ένα ω ανήκει στην ένωση αν ανήκει σε ένα τουλάχιστον σύνολο, δηλαδή αν ισχύει $X(\omega) \leq x_n$ για τουλάχιστον ένα n. Επειδή $X(\omega) \in \mathbb{R}$ και επειδή $x_n \to +\infty$, υπάρχει κάποιο n για το οποίο ισχύει $X(\omega) \leq x_n$ (και επειδή η ακολουθία είναι αύξουσα, θα ισχύει για κάθε μεγαλύτερο δείκτη). Άρα κάθε ω ανήκει στην ένωση, οπότε η ένωση είναι το Ω.
Γνωρίζουμε, γενικά, ότι αν τα ενδεχόμενα A_n μεγαλώνουν, δηλαδή αν $A_n \subseteq A_{n+1}$, και αν $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = A$, τότε $\lim_{n\to+\infty} P(A_n) = P(A)$. Άρα στην περίπτωσή μας έχουμε

$$\lim_{n\to+\infty} P(\{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \leq x_n\}) = P(\Omega) = 1.$$

Ισοδύναμα: $\lim_{n\to+\infty} P(X \leq x_n) = 1$.]

5. *Ρίχνουμε ένα ζάρι δύο φορές και θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή με τύπο $X(\omega_1, \omega_2) = \omega_1 + \omega_2$, όπου ω_1, ω_2 είναι οι ενδείξεις του πρώτου και του δεύτερου ζαριού. Βρείτε τις πιθανότητες $P(X = 4)$, $P(3 < X \leq 10)$.*

   Για να είναι $X = 4$ πρέπει να προκύψει ένα από τα ζευγάρια: $(1,3), (2,2), (3,1)$. Κάθε ζευγάρι έχει πιθανότητα $\frac{1}{6}\frac{1}{6} = \frac{1}{36}$ και άρα $P(X = 4) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

   Το ενδεχόμενο $3 < x \leq 10$ προκύπτει από 30 ζευγάρια, οπότε $P(3 < X \leq 10) = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$.

6. *Θεωρούμε ένα νόμισμα το οποίο δείχνει Κ με πιθανότητα p και Γ με πιθανότητα $1 - p$, όπου $0 < p < 1$. Ρίχνουμε το νόμισμα μέχρι να δείξει για πρώτη φορά Κ. Ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή X να είναι ο απαιτούμενος αριθμός ρίψεων. Υπολογίστε την πιθανότητα $P(X = n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ καθώς και την συνάρτηση κατανομής $F_X(x)$ για $x \in \mathbb{R}$.*

   Το ενδεχόμενο $X = n$ σημαίνει να προκύψει Γ στις πρώτες $n - 1$ ρίψεις του νομίσματος και Κ στην n-οστή ρίψη. Άρα

   $$P(X = n) = (1 - p) \cdots (1 - p)p = (1 - p)^{n-1}p \qquad \text{για } n \in \mathbb{N}.$$

   Αν $x < 1$, τότε
   $$F_X(x) = P(X \leq x) = 0.$$

   Αν $1 \leq x < 2$, τότε
   $$F_X(x) = P(X \leq x) = P(X = 1) = p.$$

   Αν $2 \leq x < 3$, τότε

   $$F_X(x) = P(X \leq x) = P(X = 1) + P(X = 2) = p + p(1 - p) = 2p - p^2.$$

   Γενικότερα, αν $n \leq x < n + 1$, τότε

   $$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X \leq x) = P(X = 1) + P(X = 2) + \cdots + P(X = n) \\ &= p + p(1 - p) + \cdots + p(1 - p)^{n-1} = p(1 + (1 - p) + \cdots + (1 - p)^{n-1}) \\ &= p\,\frac{1 - (1 - p)^n}{1 - (1 - p)} = 1 - (1 - p)^n. \end{aligned}$$

   Χρησιμοποιήσαμε την αλγεβρική ταυτότητα $1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x}$.

7. *Ένα δοχείο περιέχει N βώλους αριθμημένους από 1 έως N. Επιλέγουμε τυχαία m βώλους από το δοχείο χωρίς επανατοποθέτηση. Ονομάζουμε X και Y τον μέγιστο και τον ελάχιστο αριθμό βώλου από τους m που επιλέγουμε.*

   (i) Βρείτε την πιθανότητα $P(X \leq n)$ για κάθε $n = 1, \dots, N$ και την συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής X.

   (ii) Βρείτε την πιθανότητα $P(Y \geq n)$ για κάθε $n = 1, \dots, N$ και την συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής Y.

   (i) Το ενδεχόμενο $X \leq n$ σημαίνει ότι οι m βώλοι που επιλέγουμε έχουν όλοι αριθμό $\leq n$ (αφού ο μεγαλύτερος αριθμός επιλεγμένου βώλου είναι $\leq n$). Επειδή κάθε επιλογή γίνεται χωρίς επανατοποθέτηση, οι αριθμοί που προκύπτουν είναι διαφορετικοί. Άρα, αν $n < m$, είναι αδύνατον να προκύψουν m αριθμοί $\leq n$ και άρα $P(X \leq n) = 0$ όταν $n < m$. Τώρα έστω ότι $m \leq n \leq N$. Για κάθε $k = 1, \dots, m$ ονομάζουμε A_k το ενδεχόμενο στην k επιλογή βώλου ο αριθμός που θα προκύψει να είναι $\leq n$. Τότε

   $$\begin{aligned} P(X \leq n) &= P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m) \\ &= P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdots P(A_m|A_1 \cap \cdots \cap A_{m-1}) \\ &= \frac{n}{N}\,\frac{n-1}{N-1}\,\frac{n-2}{N-2} \cdots \frac{n-m+1}{N-m+1} = \binom{n}{m} \Big/ \binom{N}{m}. \end{aligned}$$

Άρα αν $x < m$ έχουμε
$$F_X(x) = P(X \leq x) = 0.$$
Αν $m \leq x < m+1$, τότε
$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(X \leq m) = \binom{m}{m} \Big/ \binom{N}{m}.$$
Γενικότερα, αν $n \leq x < n+1$, όπου $n = m, \ldots, N-1$, τότε
$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(X \leq n) = \binom{n}{m} \Big/ \binom{N}{m}.$$
Τέλος, αν $N \leq x < +\infty$, τότε
$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(X \leq N) = \binom{N}{m} \Big/ \binom{N}{m} = 1.$$
(ii) Ομοίως.

8. *Έστω $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ η συνάρτηση κατανομής μιας τυχαίας μεταβλητής X.*
(i) Μπορεί να υπάρχουν περισσότερα από n άλματα (δηλαδή ασυνέχειες) της συνάρτησης F_X μεγέθους $\geq \frac{1}{n}$;
(ii) Μπορεί να υπάρχουν υπεραριθμήσιμα σημεία ασυνέχειας της συνάρτησης F_X;
(i) Έστω ότι υπάρχουν m άλματα μεγέθους $\geq \frac{1}{n}$ στις θέσεις $x_1, \ldots, x_m$. Το άλμα σε κάθε θέση x_k έχει μέγεθος
$$F_X(x_k) - F_X(x_k-) = P(X = x_k).$$
Προσθέτουμε τα άλματα και έχουμε:
$$m\frac{1}{n} = \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n} \leq P(X = x_1) + \cdots + P(X = x_m) = P(X \in \{x_1, \ldots, x_m\}) \leq 1.$$
Συνεπάγεται $m \leq n$, οπότε δεν υπάρχουν περισσότερα από n άλματα μεγέθους $\geq \frac{1}{n}$.
(ii) Η F_X έχει ασυνέχεια σε κάποιο σημείο x αν και μόνο αν παρουσιάζει *θετικό* άλμα στο x, δηλαδή $P(X = x) > 0$. Άρα το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της F_X είναι το
$$A = \{x \,|\, P(X = x) > 0\}.$$
Θεωρούμε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το σύνολο
$$A_n = \left\{ x \,\middle|\, P(X = x) \geq \frac{1}{n} \right\}.$$
Παρατηρούμε ότι
$$A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n.$$
Στο (i) είδαμε ότι ο πληθάριθμος του A_n είναι το πολύ n. Άρα κάθε A_n είναι πεπερασμένο και άρα το A, ως αριθμήσιμη ένωση πεπερασμένων συνόλων, είναι αριθμήσιμο.